

L1 MPCIE
Arithmétique
Contrôle continu n°2 (27 avril 2017)

Sans document, ni calculatrice. Durée 2h

Exercice 1 (4pts)

1) Énoncer les deux versions du petit théorème de Fermat (avec et sans condition sur a).

2) Soit p un nombre premier.

a) Montrer que, pour tout k entier, $k \in [1, p-1]$, on a : $k^{p-1} \equiv 1 [p]$.

b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv -1 [p].$$

Exercice 2 (3pts)

En expliquant soigneusement votre démarche, résoudre successivement les systèmes

$$\begin{cases} x \equiv 4 [13] \\ x \equiv 5 [17] \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x \equiv 2 [16] \\ x \equiv 4 [12] \end{cases}$$

Exercice 3 (3pts)

En expliquant soigneusement votre démarche, résoudre l'équation diophantienne

$$13x - 11y = 6, \quad x, y \in \mathbb{Z} \quad (E)$$

Exercice 4 (3pts)

Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Indication : on s'inspirera de la démonstration faite en cours concernant $\sqrt{2}$ en raisonnant par l'absurde.

Exercice 5 (4pts)

On considère les polynômes $A(X) = X^2 - 3X + 1$ et $B = X^2 + 1$.

a) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $\text{pgcd}(A, B)$.

b) Trouver un couple de Bézout pour A et B , c'est à dire un couple (U, V) où $U, V \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $AU + BV = \text{pgcd}(A, B)$.

Exercice 6 (3pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver tous les a et b dans \mathbb{R} tels que $aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

On exprimera a et b en fonction de n .