

Analyse élémentaire – 2026-2027

FEUILLE D'EXERCICES N° 2 — LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice 1. On considère la fonction f définie par l'expression $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}+1}$ à valeurs réelles.

- 1) Déterminer D_f , le plus grand domaine de définition de f .
- 2) Montrer que f est strictement croissante. (*Indication:* On pourrait comparer les valeurs $f(x_1)$ et $f(x_2)$ quand $x_1 < x_2$.)
- 3) Justifier que f est injective.
- 4) Déterminer $\text{im}(f)$, l'image de f et justifier que $f : D_f \rightarrow \text{im}(f)$ est bijective.
- 5) Déterminer l'expression définissant la fonction réciproque $f^{-1} : \text{im}(f) \rightarrow D_f$, c'est-à-dire calculer la **bonne solution** de l'équation $y = f(x)$. (*Indication:* Organiser l'équation $y = f(x)$ comme une équation de degré deux en $\sqrt{x}$.)

Exercice 2. Pour les expressions ci-dessous étudier l'existence de la limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, où a est indiqué à droite. Si la limite n'existe pas, étudier l'existence des limites latérales.

- 1) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$, $\frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 4x - 6}$, $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$ en $a \in \{-3, 1, 2, +\infty\}$
- 2) $x^3 - 8x^2 + 10$, $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$, $\frac{x - \sqrt{|x|}}{x + 3}$, $\frac{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{x}$ en $a \in \{-\infty, +\infty\}$
- 3) $\sqrt{\frac{x^2 - 2x - 1}{2 - x}}$ en $a = 2^+$, $\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$ en $a = +\infty$

Exercice 3 (Limites et expression conjuguée). Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x} - \sqrt{x+2})$$

Exercice 4 (Croissances comparées). On sait que la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est strictement décroissante pour $x \geq e$ (on pourrait utiliser la dérivée pour une justification).

- 1) Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$.
- 2) En faisant le changement de variables $x = 2t$, déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- 3) En faisant des changements de variables bien choisis, déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Exercice 5 (Limites par croissances comparées). Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}(e^x + \ln x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x + e^x} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + x^2 e^x}$$

Exercice 6 (Limites et inégalités). On veut calculer la limite de $\frac{x \cos(x - 2x^2)}{\sqrt{x^4 + 1}}$ en $+\infty$.

- 1) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}$.
- 2) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{x \cos(x - 2x^2)}{\sqrt{x^4 + 1}} \right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^4 + 1}}$ et conclure.

Exercice 7. Donner un exemple d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de limite en 0 et telle que son carré en admette une.

Exercice 8. Calculer les limites suivantes. Penser à utiliser des changements de variables..

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{x} \right)^{x+2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}, \quad \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1-t)\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Exercice 9 (Limites et asymptote). Soit $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 3}{3x + 2}$.

- 1) Déterminer le plus grand domaine de définition pour lequel f définit une fonction réelle.
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$.
- 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{3}x \right) = -\frac{11}{9}$.
- 4) En déduire l'équation d'une droite asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
- 5) Étudier les variations de f .
- 6) Représenter le graphe de f ainsi que l'asymptote précédente.

Exercice 10. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$.

- 1) Déterminer le plus grand domaine de définition pour lequel f définit une fonction réelle.
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 1$.
- 3) En déduire l'équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Exercice 11 (*). Démontrer que la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ n'est pas une fonction rationnelle. (*Raisonner par l'absurde en considérant la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $\pm\infty$.*)

Exercice 12. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 1) Justifier que f est continue en 0 et que g ne l'est pas.
- 2) Étudier l'existence des limites en 0 de f , g , $f \circ g$ et $g \circ f$.¹

Exercice 13. On accepte la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (c'est un calcul de dérivée).

- 1) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 14 (Théorème des valeurs intermédiaires).

- 1) Soit la fonction $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(2x) - x$. Montrer que cette fonction s'annule sur $[0, 1]$.
- 2) On considère l'équation $2x\sqrt{x^2 + 1} = x + 1$. Montrer l'existence d'une solution sur $[0, 1]$.
- 3) Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une infinité de solutions.

1. Si f est continue et $g \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$, alors $f \circ g \xrightarrow{x \rightarrow a} f(\ell)$.