

Analyse élémentaire — 2026-2027

FEUILLE D'EXERCICES N° 1 – FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

- 1) Donner l'écriture décimale de $\frac{2}{7}$.
- 2) Résoudre $|3x - 6| - 3 = x + 15$ et $|3x - 6| - 3 = |x^2 - 1|$.
- 3) Soient $a < b$. Donner un x entre a et b , c'est-à-dire $x \in]a, b[$. Donner deux réels entre a et b .
- 4) Soit a un réel vérifiant $a \leq b$ pour tout réel b strictement positif. Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $a \leq 0$.
- 5) Démontrer que pour tous réels a et b , les relations suivantes sont vérifiées : $||a| - |b|| \leq |a - b|$,
 $\max(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2}$ et $\min(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2}$.
- 6) Calculer $\bigcap_{n=0}^9 [(-1)^n n, 10]$ et $\{x \mid x^2 - 4x + 3 \leq 0\} \cap \{x \mid x^2 - 4x + 4 > 0\}$.

Exercice 2. Soit $A = \left\{ \frac{1}{k(k+1)} \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $B = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \mid m < n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- 1) Étudier les inclusions entre A et B .
- 2) Les ensembles A et B sont-ils bornés ?
- 3) Si oui, donner l'ensemble des majorants et des minorants et calculer leurs sup et inf.
- 4) Les ensembles A et B ont-ils un maximum/minimum ?
- 5*) Calculer le nombre rationnel $\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 3. Pour quels nombres réels x les expressions suivantes sont-elles bien définies ?

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad f_3(x) = \frac{x + 1}{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}, \quad f_4(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{|x^2 + 2x| - 3}}.$$

Exercice 4 (Image et antécédents). Soit $f : [1, 3[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -3x + 2$.

- 1) Déterminer l'image de 2 par f . (On pourrait esquisser le graphe de f .)
- 2) Déterminer les antécédents de -2 par f (s'il en existe). Même question pour 2.
- 3) Déterminer l'image de f .
- 4) Reprendre les mêmes questions pour la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |-3x + 2|$.

Exercice 5. Pour chaque $m \in \mathbb{R}$ soit $f_m : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_m(x) = x^2 - 2mx$.

- 1) Déterminer l'image de f_1 et puis celle de f_{-1} .
- 2) Déterminer les valeurs du paramètre réel m telles que $\text{im}(f_m) = [-2, +\infty[$.
- 3*) Reprendre les questions en considérant $f_m : \left[-\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $f :]-\infty, 4[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 10 & \text{si } x < -4 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 2 & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ |3x - 6| - 4 & \text{si } 0 \leq x < 4. \end{cases}$$

- 1) Esquisser le graphe de f en étudiant ses variations.
- 2) Donner, s'il en existe, un minorant et/ou un majorant de f .
- 3) Déterminer les antécédents de -3 , -2 , 0 et 2 , c'est-à-dire les sous-ensembles $f^{-1}(\{-3\})$, $\dots$

Exercice 7. Le graphe d'une fonction polynomiale de degré 2 est une parabole. Une droite est tangente à la parabole si elle la coupe en un seul point (a, b) de manière multiple ; algorithmiquement, ceci veut dire qu'en éliminant y dans le système formé avec l'équation du graphe et l'équation de la droite on obtient l'équation $(x - a)^2 = 0$. Par exemple, la droite $y = 0$ coupe la parabole $y = x^2$ de manière multiple en un seul point d'abscisse $x = 0$.

- 1) Déterminer les fonctions polynomiales p de degré ≤ 2 admettant la droite $y = -x - 2$ comme tangente en 2 au graphe.
- 2) Combien de telles fonctions vérifient $p(-1) = 0$?

Exercice 8. On veut déterminer les dimensions à donner à une boîte de base carrée, sans couvercle, de 4 m^3 de contenance, pour que sa construction demande le moins de matériau possible.

- 1) Si x est la longueur du côté de la base, donner la hauteur de la boîte comme fonction de x .
- 2) Exprimer la surface latérale de la boîte, $\sigma(x)$, en fonction de x .
- 3) En sachant que sur $]0, +\infty[$ la fonction σ décroît jusqu'en x^* et puis croît strictement, donner une valeur approchée à une décimale de x^* .
- 4*) Déterminer x^* (sans utiliser la dérivée). On pourra utiliser l'interprétation de la tangente donnée dans l'exercice 7.

Exercice 9. Les fonctions ci-dessous sont définies sur $[0, +\infty[$.

- 1) Montrer que la fonction $x \mapsto (x^2 + 1)\sqrt{x}$ est strictement monotone sur $[0, +\infty[$.
- 2) Montrer que la fonction $x \mapsto (x^2 - 2)\sqrt{x}$ n'est pas monotone sur $[0, +\infty[$.
- 3) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \geq x - 1$ pour $[0, +\infty[$. En déduire la solution de $\sqrt{x} \geq |x - 1|$.

Exercice 10.

- 1) Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel $x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2 + 2x - 8})$ définit une fonction.
- 2) Déterminer le plus grand domaine de définition de la fonction donnée par l'expression $f(x) = \ln(1 - x + x^2) + \arcsin \sqrt{2 - x^2}$. Indiquer les fonctions élémentaires et les opérations nécessaires pour construire f .
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\sin(3x + \pi/6) = -\sqrt{2}/2$ et $\ln(x^2 - 4x + e) = 1$.
- 4) Construire le graphe de arccos et simplifier $\cos^2(\frac{1}{2} \arccos x)$.
- 5) La fonction $x \mapsto \cos(3x + \pi/2)$ est-elle périodique ? Si oui, déterminer sa période principale. Même question pour $x \mapsto x + \sin x$.

Exercice 11. Soient f et g deux fonctions croissantes.

- 1) Montrer que $f + g$ est croissante.
- 2) Montrer que si f et g sont positives, alors le produit fg est aussi croissant.
- 3*) Écrire la fonction $\sin$ sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$ comme différence de deux fonctions croissantes. Même question en considérant le domaine $[0, 4\pi]$.

Exercice 12. Soient $X \subset \mathbb{R}$ et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Quantifier les assertions suivantes puis leurs négations. Donner un exemple chaque fois.

- 1) f est constante / minorée
- 2) f est injective / surjective / bijective
- 3) f ne prend que des valeurs positives / prend au plus deux valeurs

Exercice 13 (*). On considère la fonction $T(x) = \cos(3 \arccos x)$ définie sur $[-1, 1]$. Vérifier que T est polynomiale et déterminer $\text{im}(T)$ ainsi que les antécédents de -1 , 0 et 1 .