

Analyse élémentaire — 2025-2026

CONTRÔLE CONTINU N° 2
 15 OCTOBRE 2026 — 9 :30-11 :30

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) n'est autorisé.

Il faut **marquer votre groupe** sur la copie dans le coin en haut à droite.

Exercice 1. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier soigneusement vos réponses (en invoquant un résultat du cours, avec un argument ou un contre exemple).

1) Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale et 1 et 4 sont deux de ses racines, alors il existe $a \in]1, 4[$ tel que $\varphi'(a) = 0$.

2) On peut affirmer sans faire de calcul que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

3) Si $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que $f'(0) = 0$, alors 0 est un point de minimum ou maximum local de f .

Solution.

1) Oui, l'existence de a est assurée par le théorème de Rolle.

2) Oui, car la fonction $x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ sur $[0, r]$ est une paramètre le quart du cercle de rayon r centré à l'origine situé dans le premier quadrant.

3) Non. La fonction $x \mapsto x^3$ est une contre exemple : 0 est un zéro de la dérivée mais pas un point d'extrémum local.

Exercice 2. En calculant les intégrales, établir les identités suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{t}{t+2} dt = 1 + 2 \ln \frac{2}{3}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4 \cos^3 x) \sin x dx = 2$ (en utilisant le changement de variable $y = \cos x$)

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1$

Solution.

1)

$$\int_0^1 \frac{t}{t+2} dt = \int_0^1 \frac{t+2-2}{t+2} dt = \int_0^1 dt - 2 \int_0^1 \frac{1}{t+2} dt = 1 - 2 [\ln(t+2)]_0^1 = 1 + 2 \ln \frac{2}{3}$$

2)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4 \cos^3 x) \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4 \cos^3 x) (-\cos x)' dx \\ &= - \int_1^0 (1 + 4y^3) dy = \int_0^1 (1 + 4y^3) dy \\ &= [y + y^4]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sin x)' dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exercice 3.

- 1) En utilisant la définition de la dérivée, calculer les limites

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{11} - 1}{x - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x)}{x - 2}.$$

- 2) Calculer la dérivée de la fonction $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ en précisant son domaine de dérivabilité.

Solution.

- 1) On a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{11} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{11} - 1^{11}}{x - 1} = (x^{11})'|_{x=1} = 11$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x) - \sin(2\pi)}{x - 2} = (\sin(\pi x))'|_{x=2} = \pi \cos(\pi x)|_{x=2} = \pi.$$

- 2) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$. Comme elle est obtenue à partir de fonctions élémentaires par des opérations algébriques et compositions, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ (le plus grand ouvert contenu dans son domaine de définition). On a

$$h'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$.

- Donner le domaine maximal de définition $D_f \subset \mathbb{R}$ de f . Calculer f' et préciser le domaine de dérivabilité de f .
- Dresser le tableau de variations de f . Préciser sur le tableau de variations l'existence éventuelle des asymptotes verticales.
- Esquisser le graphe de f en indiquant les points où la tangente au graphe est horizontale.
- Justifier que la fonction $g :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$ est bijective.
- Donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de g et déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1} ?
- Donner l'équation de la tangente en -1 au graphe de g et calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$.

Solution.

- 1) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. En tant que fonction rationnelle, f est $\mathcal{C}^\infty$ (à vrai dire elle est analytique) sur son domaine de définition. On a

$$f'(x) = \frac{3x^2(x - 1) - x^3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2(2x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

En particulier, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 3$.

- 2) On a

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$+\infty$
			$-\infty$	$\nearrow$	
				$\frac{27}{4}$	

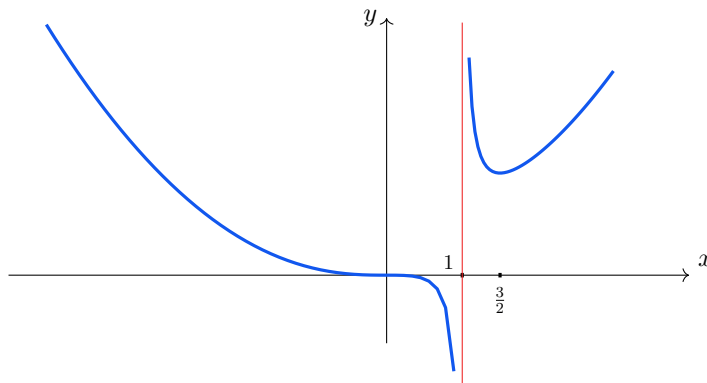
car

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3^3}{2^3}}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{27}{4}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

3)



4) La fonction g est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1[$. La bijectivité de g découle de l'inspection du tableau de variation, ou de la représentation graphique de f .

5) La tangente en 0 est $y = 0$. En particulier, g^{-1} n'est pas dérivable en 0. Son domaine de dérivabilité est $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ — l'ensemble des $g(x)$ où $x \in]-\infty, 1[$ et $g'(x) \neq 0$.

6) La tangente en -1 est décrite par l'équation

$$y = g(-1) + g'(-1)(x + 1) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}(x + 1)$$

c'est-à-dire

$$y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{4}.$$

Comme $g(-1) = -\frac{1}{2}$, il s'ensuit que

$$(g^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{5}.$$

Barème indicatif : 3 — 6 — 3.5 — 7.5