Université d'Angers **2026-27**
L1 MI-MPC-DL ME-MI **Module : Analyse élémentaire P1**

Contrôle continu 1 : Lundi 19 Octobre, 9h-10h30. Tiers-Temps 9h-11h

Aucun document, aucun appareil électronique n'est autorisé (téléphone, calculatrice, ...).
Le nombre total de points est $20\frac{1}{2}$.

Exercice 1 : Total de l'exercice 1 : $\frac{1}{2}$ pts

Donner votre groupe et le prénom (ou nom) de votre enseignant.

Exercice 2 : Total de l'exercice 2 : 5 pts

On considère les parties de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R}\,;\ |x-1| < 3\}\,, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 - x - 6 \leq 0\right\}.$$

(a) (1 point) Écrire ces parties A et B sous forme d'intervalles.
(b) (1 point) Déterminer leur intersection $A \cap B$ et leur réunion $A \cup B$.
(c) (1 point) Déterminer l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de

$$A \cap B.$$

En déduire sa borne supérieure et sa borne inférieure :

$$\sup_{\mathbb{R}}(A \cap B) \qquad \text{et} \qquad \inf_{\mathbb{R}}(A \cap B).$$

(d) (1 point) La partie $A \cap B$ possède-t-elle un maximum ? un minimum ? Justifier.
(e) ($\frac{1}{2}$ point) Soit $E \subset \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs : l'assertion « E est majoré ».
(f) ($\frac{1}{2}$ point) Écrire à l'aide de quantificateurs : la négation de l'assertion précédente.

Exercice 3 : Total de l'exercice 3 : 5 pts

On considère l'application

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

(a) (1 point) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
(b) (1 point) Déterminer l'ensemble image de f, $f([0, +\infty[)$.
(c) (1 point) Montrer que l'application

$$g : [0, +\infty[\longrightarrow [-3, +\infty[$$
$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

est bijective.

(d) (2 points) Déterminer son application réciproque

$$g^{-1} : [-3, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[.$$

Exercice 4 : Total de l'exercice 4 : 6 pts

Calculer les limites suivantes en justifiant les transformations effectuées.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}, \qquad \lim_{x\to 1^-} \ln(1 - x), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}.$$

Exercice 5 : Total de l'exercice 5 : 4 pts

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x \cos(x^2)}{x^2 + 1}.$$

(a) (1 point) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq \frac{|x|}{x^2 + 1}.$$

(b) (1 point) Calculer

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1}.$$

(c) (2 points) En déduire, à l'aide d'un théorème du cours,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x).$$