Université d'Angers
Département de Mathématique

Fondements mathématiques – 2008-2009

Devoir n^0 1

Exercice 1. On considère l'équation $(m-1)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$.

1) Trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que l'équation admette deux racines x_1, x_2 strictement plus petites que 1.

2) Trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que les racines satisfassent $x_1 < 1 \leq x_2 \leq 2$.

Exercice 2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Donner la définition en ε et δ de f *admet la limite* $-\infty$ *à* $+\infty$.

Exercice 3. Soit I un intervalle ouvert réel et soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des limites finies l et respectivement m en $a \in I$.

1) Eu utilisant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite, montrer que f est bornée sur un ensemble du type $]-r+a, a[\cup]a, a+r[$.

2) En utilisant l'inégalité

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\ &\leq |f(x)||g(x) - m| + |f(x) - l||m| \end{aligned}$$

et la définition de la limite, démontrer que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = lm$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x^2-1) - 2 & x \leq -1 \\ -x^2 - 3mx + 1 & x > -1 \\ \cancel{0 \qquad\qquad x = 1} \end{cases}$$

erreur d'énoncé !

$f(1) = 0 = -\cancel{1} - 3m \cancel{+1} = -3m$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel.

1) Déterminer m tel que f soit injective.

2) Déterminer m tel que f ait une limite en -1.

Exercice 5. Soit f la fonction à valeurs réelle définie par $f(x) = \dfrac{x \sin x - 2\cos x}{x^2 + \arctan x + 2}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Monter que f est bornée.

3) Même problème si on remplace au dénominateur x^2 par $|x|$.

UNIVERSITÉ D'ANGERS
Département de Mathématique

Fondements mathématiques – 2008-2009

Devoir n⁰ 1 – Corrigé

Exercice 1. Soit $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + 2m + 3$ et soit Δ le discriminant. Pour le 1) il faut avoir $m \neq 1$ et ensuite il faut que m vérifie les trois conditions suivantes : $\Delta = 4(-m^2 - m + 3) \geq 0$, $(m-1)f(1) > 0$ et $\frac{m}{m-1} < 1$. La dernière condition assure que le sommet de la parabole se trouve à gauche par rapport à la droite $x = 1$. On obtient $m \in]\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}[$ pour la première condition, $m \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ pour la deuxième et $m < 1$. Donc on obtient $m \in]\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, -2[$.

Pour le 2) on a $m \neq 1$, $(m-1)f(1) < 0$ et $(m-1)f(2) > 0$. La condition sur le discriminant n'est plus nécessaire. On obtient $m \in [-2, 1/2]$.

Exercice 2. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $x > \delta$ on ait $f(x) < -\varepsilon$.

Exercice 3. Dans la définition de la limite pour f en a (pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout x avec $0 < |x-a| < \delta$ on ait $|f(x) - l| < \varepsilon$) on prend $r = \delta(1)$ pour obtenir $|f(x)| < l + 1$ pour $x \in]-r+a, a[\cup]a, a+r[$.

Pour finir, soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\ &\leq |f(x)||g(x) - m| + |f(x) - l||m| \\ &< (l+1)\varepsilon + m\varepsilon \end{aligned}$$

dès que $0 < |x-a| < \min(\delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$, avec $\eta(\varepsilon)$ la borne donnée par la définition de la limite de g en a. On prend la borne

$$\mu(\varepsilon) = \min\left(\delta\left(\frac{\varepsilon}{l+m+1}\right), \eta\left(\frac{\varepsilon}{l+m+1}\right)\right)$$

pour obtenir que si $0 < |x-a| < \mu(\varepsilon)$ alors $|f(x)g(x) - lm| < \varepsilon$.

Exercice 4. Je donne la solution avec la ligne $f(1) = 0$ enlevée. Pour que f soit injective il faut que $-3m/2 \leq -1$ et que $(-x^2 - 3mx + 1)\,|_{x=-1} \leq f(-1)$. On obtient $m \geq 2/3$ et $m \leq -1/3$. Donc f n'est jamais injective.

Pour que la limite existe il faut et il suffit que $-1 = f(-1) = \lim_{x \nearrow -1} f(x) = 3m$, c'est-à-dire $m = -1/3$.

Exercice 5. Le domaine est $\mathbb{R}$, car $\arctan x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour voir que f est bornée, on remarque que pour $|x| \geq 2$ on a

$$\left|\frac{x\sin x - 2\cos x}{x^2 + \arctan x + 2}\right| \leq \frac{|x| + 2}{x^2 + \arctan x + 2} \leq \frac{|x|+2}{x^2} \leq 1.$$

Comme f est bornée aussi sur $[-2, 2]$ par le théorème de Weierstrass, on conclut que f est bornée sur $\mathbb{R}$.