DEVOIR 2 FONDEMENTS DE MATHEMATIQUES 2008

1. En utilisant les DL appropriés, calculer les limites suivantes:

   (a)
   $$lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x^2-2)}{\sin(x-1)}$$

   (b)
   $$lim_{x\to 0}(1+\tan(x))^{\frac{1}{x}}$$

2. Soit $f:\mathbb{R}^*\rightarrowtail\mathbb{R}$ la fonction donnée par la formule:
   $$f(x)=x^n\sin(\frac{1}{x^2}),\quad \text{avec}\quad n\in\mathbb{N}^*$$

   (a) Prolonger par continuité la fonction $f$ en 0,

   (b) à partir de quel $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction $f$ est-elle de ~~classe $C^1$~~ derivable dans $\mathbb{R}$ ? Justifier la réponse de manière détaillée.

3. On considère l'équation différentielle
   $$\cancel{y'=3y^{2/3}}\quad y'=3\sqrt[3]{y^2}$$

   (a) Montrer que pour tout $C\in\mathbb{R}$ la fonction $y(x)=(x+C)^3$ vérifie cette équation.

   (b) Choisir 4 valeurs de $C$ au hasard et dessiner les représentations graphiqes des fonctions $y_i(x)=(x+C_i)^3$ dans le plan $(x,y)$.

   (c) montrer que le problème de Cauchy
   $$\begin{cases} y'=\cancel{y^{2/3}}\ 3\sqrt[3]{y^2}, \\ y(1)=0 \end{cases}.$$

   possède non pas une mais **deux** solutions, dont une de la forme $y(x)=(x+C)^3$ (trouver $C$). Quelle est l'autre solution?

4. Résoudre les équations différentielles suivantes:

   (a) $y'=ax^3(y^2+1)$

   (b) $y'=y(5+x^3)$

# Correction Devoir 2 Fondements Analyse

1. (a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(3x^2-2)}{\sin(x-1)} = \frac{\ln(3-2)}{\sin 1-1} = \frac{0}{0} \text{ forme indéterminée}$$

Posons $x = 1+h$ donc $h = x-1$

Quand $x \longrightarrow 1$, $h \longrightarrow 0$

$$\ln(3x^2-2) = \ln\left[3(1+h)^2-2\right] = \ln\left[3(1+2h+h^2)-2\right]$$

$$= \ln(1+6h+3h^2)$$

$$\ln(1+X) = X + X\,\varepsilon(X) \text{ pour tout } X \in ]-1,+\infty[$$

avec $\lim_{X \to 0} \varepsilon(X) = 0$

Posons $X = 6h+3h^2$

donc $\ln(1+6h+3h^2) = 6h+3h^2+(6h+3h^2)\,\varepsilon(6h+3h^2)$

$$= 6h + h\,\varepsilon'(h)$$

avec $\varepsilon'(h) \stackrel{\text{déf}}{=} 3h + (6+3h)\,\varepsilon(6h+3h^2) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$

$$\sin(x-1) = \sin h = h + h\,\varepsilon(h)$$

donc $\dfrac{\ln(3x^2-2)}{\sin(x-1)} = \dfrac{\ln(1+6h+3h^2)}{\sin h} = \dfrac{6h + h\,\varepsilon'(h)}{h + h\,\varepsilon(h)}$

$$= \frac{\cancel{h} \times (6+\varepsilon'(h))}{\cancel{h} \times (1+\varepsilon(h))} \longrightarrow \frac{6+0}{1+0} = 6$$

quand $h \longrightarrow 0$

donc $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln(3x^2-2)}{\sin(x-1)} = 6$

(B)

$\displaystyle\lim_{x \to 0} (1+\tan x)^{1/x} = 1^{\pm\infty}$ forme indéterminée

$(1+\tan x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\tan x)}$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0}$ = la dérivée de tan en 0

$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

donc $(\tan)'(0) = 1$

donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ donc $\tan x = x + x\,\varepsilon(x)$

$\ln(1+X) = X + X\,\varepsilon'(X)$ donc

$\ln(1+\tan x) = \ln(1+x+x\,\varepsilon(x))$

$$= x + x\,\varepsilon(x) + \left(x + x\,\varepsilon(x)\right)\,\varepsilon'\left(x + x\,\varepsilon(x)\right)$$

$$= x + x\,\varepsilon''(x)$$

avec $\varepsilon''(x) = \varepsilon(x) + \left(1 + \varepsilon(x)\right)\,\varepsilon'\left(x + x\,\varepsilon(x)\right)$

donc $\frac{1}{x}\ln(1+\tan x) = \dfrac{x + x\,\varepsilon''(x)}{x} = 1 + \varepsilon''(x) \longrightarrow 1$ quand $x \longrightarrow 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} (1+\tan x)^{1/x} = e^{1} = e$

car exp est continue en 1

Exercice 2

(a) pour tout $x \neq 0$ $f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ avec $n \geqslant 1$.

donc $|f(x)| = |x|^n \left|\sin \frac{1}{x^2}\right| \leq |x|^n \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$

donc en posant $f(0) = 0$ alors $f$ est continue en $0$

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

Cas $x_0 \in \mathbb{R}^*$

④

l'application $x \longmapsto 1/x^2$ est dérivable en $x_0$

sin dérivable en $1/x_0$

donc par composé, $\sin 1/x^2$ dérivable en $x_0$

et $\sin\left(1/x^2\right)' = -2\,x^{-3}\cos\left(1/x^2\right) = \dfrac{-2\cos(1/x^2)}{x^3}$

l'application

$x \longmapsto x^n$ est dérivable en $x_0$

donc par produit, $f$ est dérivable en $x_0$

de dérivée

$$f'(x) = n\,x^{n-1}\sin 1/x^2 + x^n\,\frac{-2\cos(1/x^2)}{x^3}$$

$$= n\,x^{n-1}\sin 1/x^2 - 2\,x^{n-3}\cos 1/x^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

cas $x_0 = 0$. D'après (a) $f(0) = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x^{n-1}\sin\left(1/x^2\right)$$

au a) on a vu que si $n-1 \geqslant 1$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x^{n-1}\sin 1/x^2 = 0$

donc si $n \geqslant 2$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et est égale à $0$

c à d $f$ est dérivable en 0

de dérivée $f'(0)$ égale à 0 si $n \geq 2$

Montrons que $\sin 1/x^2$ n'a pas de limite en 0 :

Soit $x_n$ tq $1/x_n^2 = n\pi$

$\Leftrightarrow \quad x_n^2 = \dfrac{1}{n\pi} \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \sqrt{\dfrac{1}{n\pi}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{1}{n\pi}} = 0$

$\sin 1/x_n^2 = \sin n\pi = 0 \xrightarrow[\text{quand } n \to +\infty]{} 0$

Soit $y_n$ tq $1/y_n^2 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

donc $y_n = \sqrt{\dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \xrightarrow[\text{quand } n \to +\infty]{} 0$

$\sin y_n = \sin 2n\pi + \frac{\pi}{2} = 1 \xrightarrow[\text{quand } n \to +\infty]{} 1$

Comme $\lim \sin x_n \neq \lim \sin y_n$

$\lim\limits_{x \to 0} \sin 1/x^2$ n'existe pas

Dans le cas $n = 1$ $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(1/x^2\right)$

donc $f$ n'est pas dérivable en 0 si $n = 1$.

Bilan Si $n = 1$ $f$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$

Si $n \geq 2$ $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

On rappelle qu'à priori, l'application $x \longmapsto x^{2/3}$ n'est défini que sur $\mathbb{R}^{+*}$

Mais elle coïncide avec l'application $x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}$ qui elle est défini sur $\mathbb{R}$.

Donc on change l'énoncé, au lieu de considérer $y^{2/3}$, on considère $\sqrt[3]{y^2}$ sinon la question (c) n'a aucun sens car $y(1)^{2/3} = 0^{2/3}$ n'est pas défini.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$

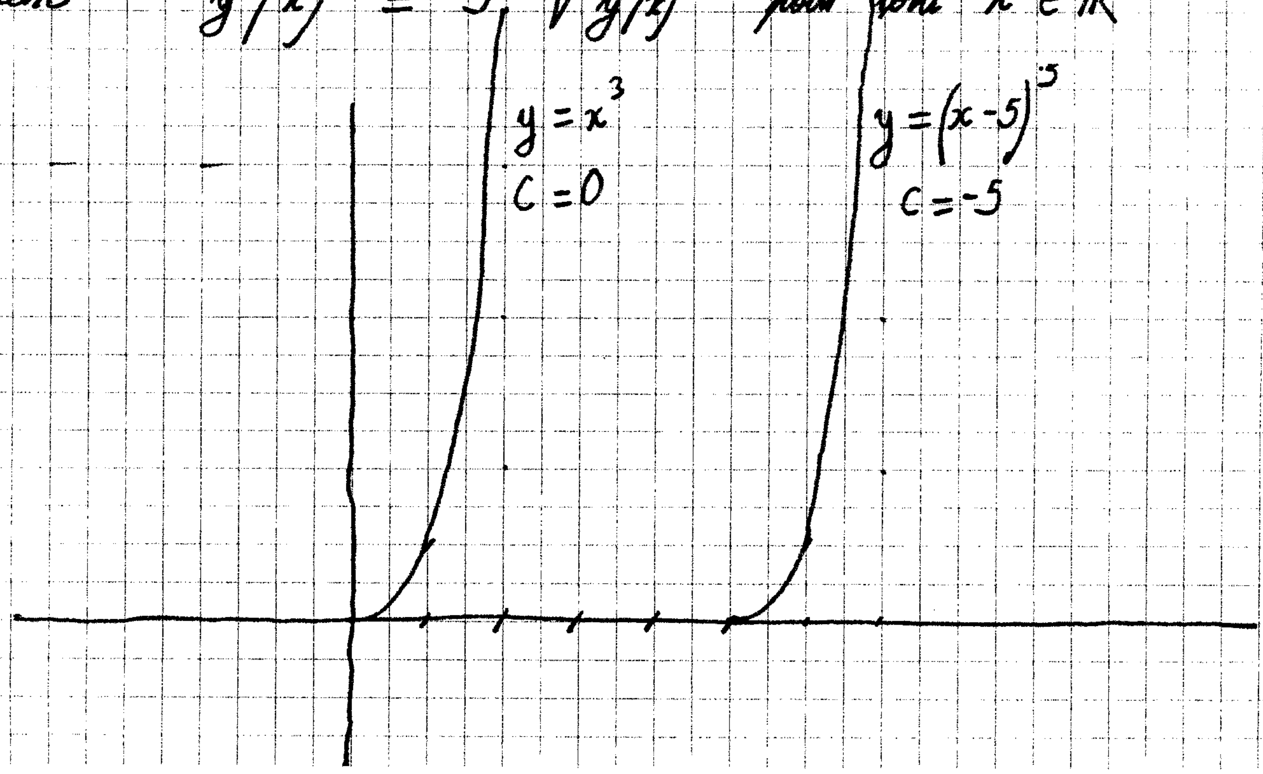
$$\sqrt[3]{y(x)^2} = \sqrt[3]{(x+C)^6} = \sqrt[3]{\left[(x+C)^2\right]^3} = (x+C)^2$$

$y(x) = (x+C)^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$

et $y'(x) = 3(x+C)^{3-1} = 3(x+C)^2$

donc $y'(x) = 3\sqrt[3]{y(x)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b)



Les représentations graphiques s'obtiennent à partir

de $y(x) = x^3$ (cas $C=0$)

par translation du vecteur $(-C, 0)$

c) $y(1) = (1+C)^3 = 0 \iff C = -1$

donc $(x-1)^3$ est une solution du problème

de Cauchy.

L'application constante nulle est solution de

$y' = 3y^{2/3}$ et vérifie $y(1) = 0$

Exercice 4

a) Soit $I$ un intervalle ouvert quelconque fixé

$$\forall x \in I \quad y'(x) = a x^3 (y^2+1)$$

cas $a = 0$

$\forall x \in I \quad y'(x) = 0 \iff y$ est une application constante sur $I$

cas $a$ quelconque

$$\forall x \in I \quad y'(x) = a x^3 (y^2+1)$$

$$\iff \forall x \in I \quad \frac{y'(x)}{y^2+1} = a x^3$$

$$\iff \forall x \in I, \quad \text{Arctan}\, y(x) = \frac{a x^4}{4} + C$$

où $C$ est une constante

$$\iff \forall x \in I \quad \frac{a x^4}{4} + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{et} \quad y(x) = \tan\left(\frac{a x^4}{4} + C\right)$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(x)(5+x^3)$ est une equation differentielle lineaire du $1^{er}$ ordre

Cherchons une solution positive sur $\mathbb{R}$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 5 + x^3 \qquad \left(\ln y(x)\right)' = 5 + x^3$$

donc $\ln y(x) = 5x + \frac{x^4}{4} + \text{Constante}$

Prenons la constante nulle

$$y(x) = e^{5x + \frac{x^4}{4}}$$

donc $e^{5x + \frac{x^4}{4}}$ est une solution non nulle de l'

équation differentielle lineaire $y' = y(5 + x^3)$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des applications de la forme $y(x) = C\, e^{5x + \frac{x^4}{4}}$

où $C$ est une constante reelle.