

Corrige' Devoir 2: Algebre 2007-8

Exercice 1

1. E' est defini par deux equations lineaires independantes
c'ä d un systeme d'equations lineaires de rang 2.

donc $\dim E' = 5 - 2 = 3$

Soit $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

$$u \in E' \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 & L_1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 & L'_1 = L_1 \\ -x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 11x_5 = 0 & L'_2 = L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0 & L'_1 + L'_2 \\ -x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 11x_5 = 0 & L'_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 + 2x_4 - 9x_5 \\ x_2 = 5x_3 - 3x_4 + 11x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = \begin{pmatrix} -4x_3 + 2x_4 - 9x_5 \\ 5x_3 - 3x_4 + 11x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow u = x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ famille génératrice à 3 éléments

de E' de dim 3 donc est une base de E'
 (En fait, il est clair que ces 3 vecteurs sont libres !)

2. Soit $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$.

$$u \in E'' = \text{vect}(v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{tel que } u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad \text{tg} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad \text{tg} \begin{cases} x_1 = 4\lambda_2 + \lambda_3 \\ x_2 = 2\lambda_1 \\ x_3 = 5\lambda_1 + 7\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ x_4 = -\lambda_1 - 5\lambda_2 - \lambda_3 \\ x_5 = 6\lambda_1 + 8\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad \text{tg} \begin{cases} \lambda_1 = x_2/2 \\ 4\lambda_2 + \lambda_3 = x_1 \\ 5 \frac{x_2}{2} + 7\lambda_2 + 2\lambda_3 = x_3 \\ -\frac{x_2}{2} - 5\lambda_2 - \lambda_3 = x_4 \\ 6 \frac{x_2}{2} + 8\lambda_2 + 3\lambda_3 = x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad \text{tg} \begin{cases} 4\lambda_2 + \lambda_3 = x_1 & L_1 \\ 7\lambda_2 + 2\lambda_3 = x_3 - \frac{5}{2}x_2 & L_2 \\ -5\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{x_2}{2} + x_4 & L_3 \\ 8\lambda_2 + 3\lambda_3 = x_5 - 3x_2 & L_4 \end{cases}$$

(4)

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad t_9$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 - 3L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -4\lambda_2 + \lambda_3 = x_1 \\ -\lambda_2 = x_3 - \frac{5}{2}x_2 - 2x_1 \\ -\lambda_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + x_4 \\ -4\lambda_2 = x_5 - 3x_2 - 3x_1 \end{array} \right. \begin{array}{l} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \\ L'_4 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad t_9$$

$$\begin{array}{l} L'_1 + L'_4 \\ L'_2 \\ L'_3 \\ L'_4/4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 = -2x_1 - 3x_2 + x_5 \\ -\lambda_2 = x_3 - \frac{5}{2}x_2 - 2x_1 \\ -\lambda_2 = x_1 + \frac{x_2}{2} + x_4 \\ -\lambda_2 = \frac{x_5}{4} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L''_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_3 - \frac{5}{2}x_2 - 2x_1 = x_1 + \frac{x_2}{2} + x_4 \\ x_3 - \frac{5}{2}x_2 - 2x_1 = \frac{x_5}{4} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 4L''_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_3 - 10x_2 - 8x_1 = x_5 - 3x_2 - 3x_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_5 = 0 \end{array} \right.$$

on vérifie $3 \times 2 - 5 + -1 = 0$ et $7 \times 2 - 4 \times 5 + 6 = 0$ pour v_2 .

3. Soit $u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$.

$$u \in E' \cap E'' \iff u \in E' \text{ et } u \in E''$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 & L_1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 & L_2 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 & L_3 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_5 = 0 & L_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 2x_5 = 0 & L_1 - L_3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_5 = 0 & L_2 + L_3 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 & L_3 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_5 = 0 & L_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0 & L'_1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 & (L_2 + L_3) - 7L'_1 = L''_2 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 & L_3 \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0 & L_4 - L'_1 \end{cases}$$

car $L_4 - L'_1 = -2 \times L''_2$ donc le système est de rang 3.

on continuant on peut trouver une famille génératrice de $E' \cap E''$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0 & L_1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 & L''_2 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 0 & L_3 + \frac{1}{2}L''_2 \end{cases}$$

Comme le rang du système est 3 $\dim E' \cap E'' = 5 - 3 = 2$

Exercice 2 Soient (x, y, z) et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

(6)

$$1^\circ. f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(y+z') - c(y+y') \\ c(x+x') - a(z+z') \\ a(y+y') - b(x+x') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} by - cy + bz' - cy' \\ cx - ay + cx' - az' \\ ay - bx + ay' - bx' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

De même, on montre $f \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \lambda f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$2. a) f(w) = \begin{pmatrix} bc - cb \\ ca - ac \\ ab - ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

donc $w \in \text{Ker } f = \vec{0}$

$$w \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } c \neq 0.$$

$$\text{donc } \{v, w\} \text{ lie } \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad v = \lambda w \Rightarrow f(v) = \lambda f(w) = 0$$

$$\Rightarrow v \in \vec{0}$$

$$\text{Si } v \in \vec{0} \text{ alors } \begin{cases} by - cy = 0 \\ cx - ay = 0 \\ ay - bx = 0 \end{cases}$$

⑦

donc $\begin{cases} y = \frac{b}{c} z \\ x = \frac{a}{c} z \end{cases}$ donc $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} z \\ \frac{b}{c} z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{c} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{z}{c} w$

donc v et w lin.

B) Comme $w \neq 0$

$u \in E \iff v \in \text{vect } w$

donc w est une base de E qui est donc de dimension 1.

3

a) $w_1 = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F = \text{Im } f$

$w_2 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$, $w_3 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$

Comme $c \neq 0$ w_1 et w_2 sont lin.

B) 1^{re} méthode Soit $u \in \text{Im } f$

alors $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tq } u = f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $= x w_1 + y w_2 + z w_3$
 $= x w_1 + y w_2 - z \frac{a w_1 + b w_2}{c}$

③

donc w_1, w_2 famille génératrice de F

d'après a) libre aussi donc Base de F

et donc $F = L$

2^e méthode : d'après formule du rang

$$\text{rang } f + \dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\dim F + \dim G = 3$$

d'après 2 & $\dim G = 1$ donc $\dim F = 3 - 1 = 2$

w_1, w_2 famille libre à 2 éléments dans un

ev de dim 2 donc base de F .

c) Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. d'après 3 & $F = \text{vect}(w_1, w_2)$

$$v \in \text{vect}(w_1, w_2) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ tq } v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} x = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 (-c) \\ y = \lambda_1 \times c + \lambda_2 \times 0 \\ z = \lambda_1 (-c) + \lambda_2 (x_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} \lambda_2 = -\frac{x}{c} \\ \lambda_1 = y/c \\ z = y/c(-c) + (-\frac{x}{c}) \times x_2 \end{cases}$$

(9)

$$\Leftrightarrow y = -\frac{b}{c}y + -\frac{x}{c}a \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$$

c à d F est le plan de vecteurs normal w

4 a) Montrons que $F \cap G = \{0\}$

Soit $v \in F \cap G$

comme $v \in G$, d'après 2 a) $v = \lambda w$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$

comme $v \in F$ v est orthogonal à w d'après 3 c)

donc $\lambda = 0$ donc $v = 0$ donc $F \cap G = \{0\}$

donc la somme $F + G$ est directe. On peut donc la noter $F \oplus G$.

$$\begin{aligned} \dim F \oplus G &= \dim F + \dim G - \dim F \cap G \\ &= \dim \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

d'après les formules de Grassmann et du rang
donc comme $F \oplus G \subset \mathbb{R}^3$ alors $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

b) $0 \in F$ donc $f(0) \in f(F)$
Comme f linéaire $0 = f(0)$ } donc $0 \in f(F)$

Soit u_1 et $u_2 \in f(F)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

donc $\exists v_1, v_2 \in F$ tq $u_1 = f(v_1)$ et $u_2 = f(v_2)$

donc comme f est linéaire

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

Comme F est un s.v., $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F$

donc $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in f(F)$.

donc $f(F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En fait de manière générale l'image d'un s.v. par une

application linéaire est un o.e.v

Comme $f(F) \subset f(\mathbb{R}^3) = F$, $f(F)$ o.e.v de F

1^{ère} méthode

$$f(w_1) = \begin{pmatrix} -b^2 - c^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix} \quad f(w_2) = \begin{pmatrix} ab \\ -c^2 - a^2 \\ bc \end{pmatrix}$$

Montrons que $f(w_1), f(w_2)$ sont libres

$$\lambda_1 f(w_1) + \lambda_2 f(w_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(-b^2 - c^2) + \lambda_2 ab = 0 & L_1 \\ \lambda_1 ab + \lambda_2(-c^2 - a^2) = 0 & L_2 \\ \lambda_1 ac + \lambda_2 bc = 0 & L_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$L_2 - b L_3 \quad \lambda_2(-c^2 - a^2 - b^2) = 0 \text{ donc } \lambda_2 = 0$$

$$\text{donc d'après } L_1 \quad \lambda_1 = 0$$

donc comme $f(w_1)$ et $f(w_2) \in f(F)$, donc $\dim f(F) \geq 2$

comme $f(F) \subset F$ de dim 2 alors $f(F) = F$

2^{ème} méthode Soit restriction de f à F , $f|_F: F \rightarrow \mathbb{R}^3$

à priori nous avons $F \cap \text{Ker } f = \{0\}$ d'après 4 a)

donc $f|_F$ est injectif donc $\text{rang } f|_F = \dim F = 2$

donc $\text{rang } f|_F = \dim f(F) = 2$

Comme $f(F) \subset F$ de dim 2 alors $f(F) = F$

5.a) D'après 2 a) $G = \text{vect } w$

d'après 3 b) $F = \text{vect } w_1, w_2$

Comme $\mathbb{R}^3 = F + G$, w, w_1, w_2 famille génératrice

$\tilde{a}$ 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ donc base.

b) $f(w) = 0$

$$f(w_1) = f\left(c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = c f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - b f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= c w_2 - b w_3$$

$a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0$ donc $w_3 = \frac{-a w_1 - b w_2}{c}$

donc $f(w_1) = c w_2 + \frac{(b a w_1 + b^2 w_2)}{c}$

$$= \frac{a b}{c} w_1 + \frac{(b^2 + c^2)}{c} w_2$$

$$f(w_2) = -c f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + a f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -c w_1 + a w_3$$

$$= -c w_1 - \frac{a^2 w_1 - a b w_2}{c} = -\frac{a^2 + c^2}{c} w_1 - \frac{a b}{c} w_2$$

donc la matrice de f dans la base β

$$\text{mat}(\beta, f\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ab}{c} & -\frac{a^2 + c^2}{c} \\ 0 & \frac{b^2 + c^2}{c} & -\frac{ab}{c} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & -a^2 - c^2 \\ 0 & b^2 + c^2 & -ab \end{pmatrix}$$

donc

$\text{mat}(\beta \circ f, \beta) = \text{mat}(\beta, f\beta) \times \text{mat}(\beta, f\beta)$ est égal à

$$\frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (ab)^2 - (a^2+c^2)(b^2+c^2) & -ab(a^2+c^2) + \cancel{(a^2+c^2)}ab \\ 0 & \cancel{(b^2+c^2)}ab - ab(b^2+c^2) & -\cancel{(b^2+c^2)}(a^2+c^2) + (ab)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{a^2b^2} - \cancel{a^2b^2} - a^2c^2 - c^2b^2 - c^4 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2c^2 - c^2b^2 - c^4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{pmatrix}$$

FIN

Remarque

On définit le produit vectoriel de w et de v noté $w \wedge v$ par $\mathcal{B}(v)$

La notion de produit vectoriel est très utilisée en électromagnétisme