

Devoir 1 Fondements de Maths 2008-9

(1)

Exercice 1 $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + 2m + 3$
Il faut $m \neq 1$.

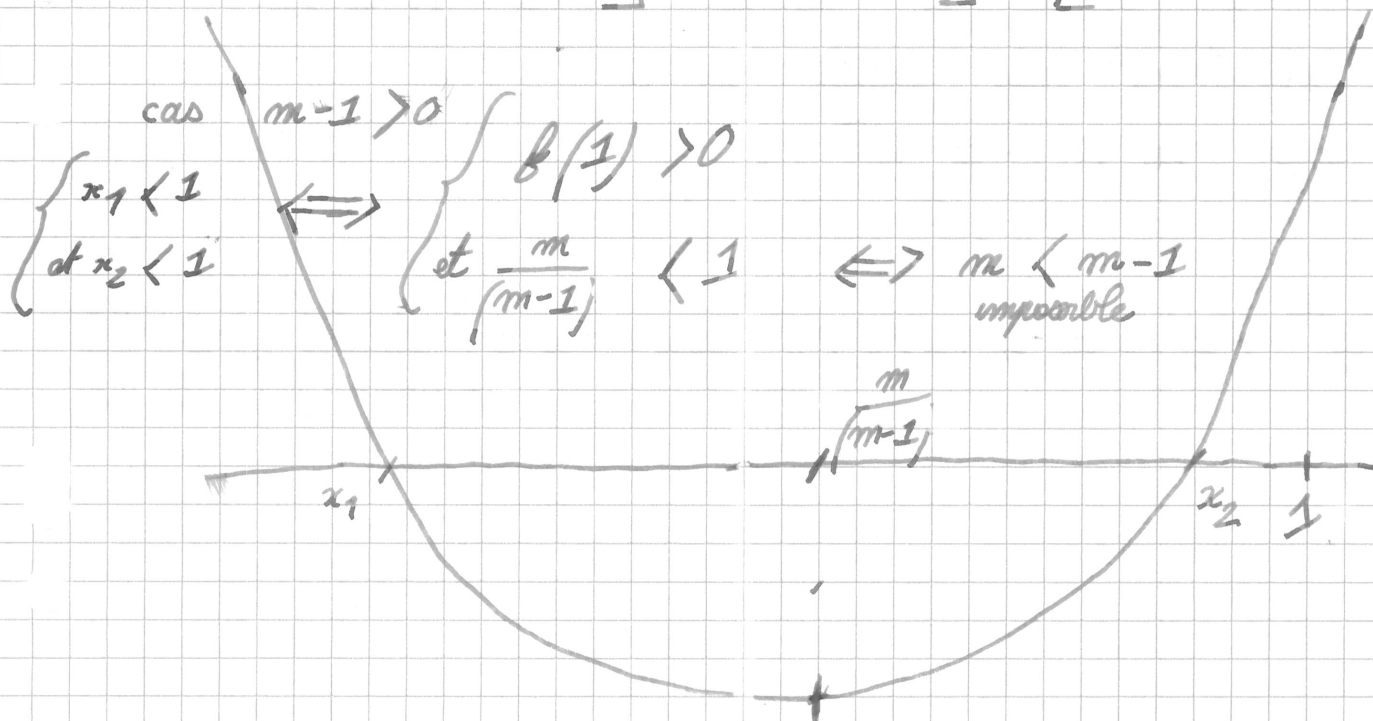
$$\begin{aligned} 1) \quad \Delta &= 4m^2 - 4(m-1)(2m+3) \\ &= 4(m^2 - (2m^2 - 2m + 3m - 3)) \\ &= 4(-m^2 - m + 3) \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 + 3 \times 4 = 13$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{-2}$$

donc $4(-m^2 - m + 3) = -4\left(m + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(m + \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) > 0$

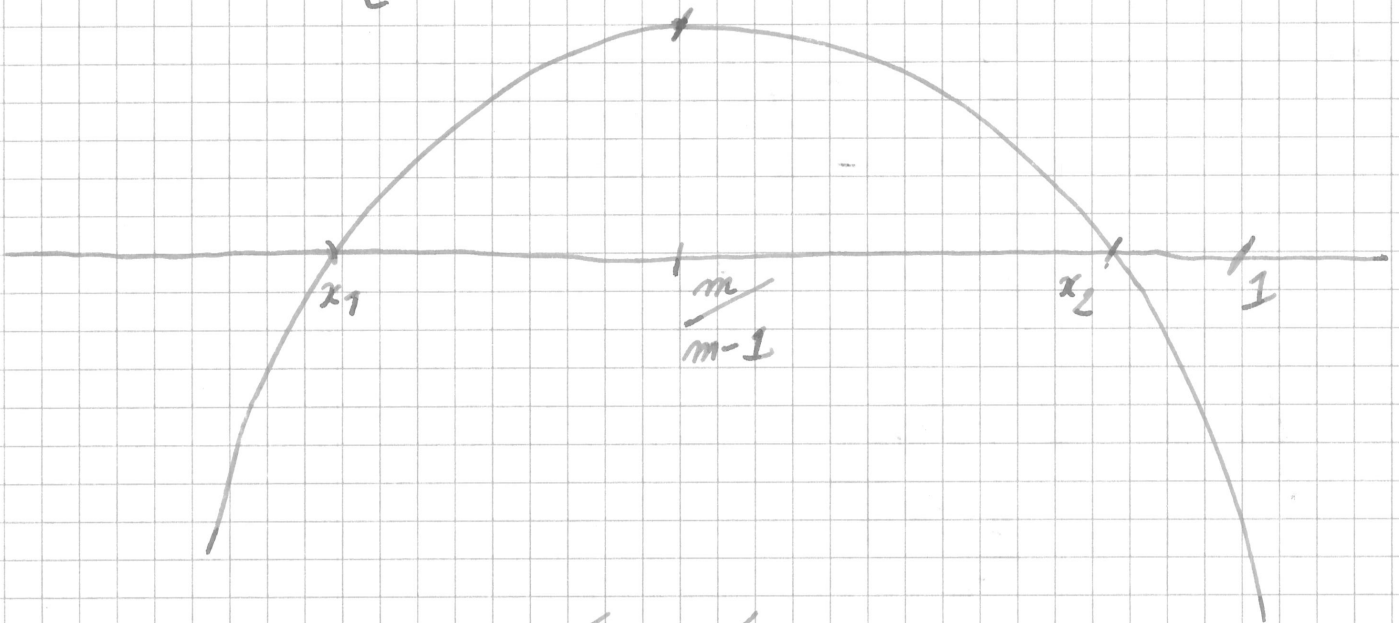
SSI $m \in \left] \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right[$



$$f \text{ admet son minimum en } -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2(m-1)} = \frac{m}{m-1} \quad (2)$$

$$\text{car } m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$$

$$\text{et } \begin{cases} f(1) < 0 \\ \frac{m}{m-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > m-1 \text{ toujours vrai}$$



$$f(1) = m-1 - 2/m + 2/m + 3 = m+2 < 0$$

$$\Leftrightarrow m < -2$$

Bilan f admet 2 racines distinctes x_1 et x_2
strictement plus petites que 1

$$\Leftrightarrow m \in \left] -\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -2 \right]$$

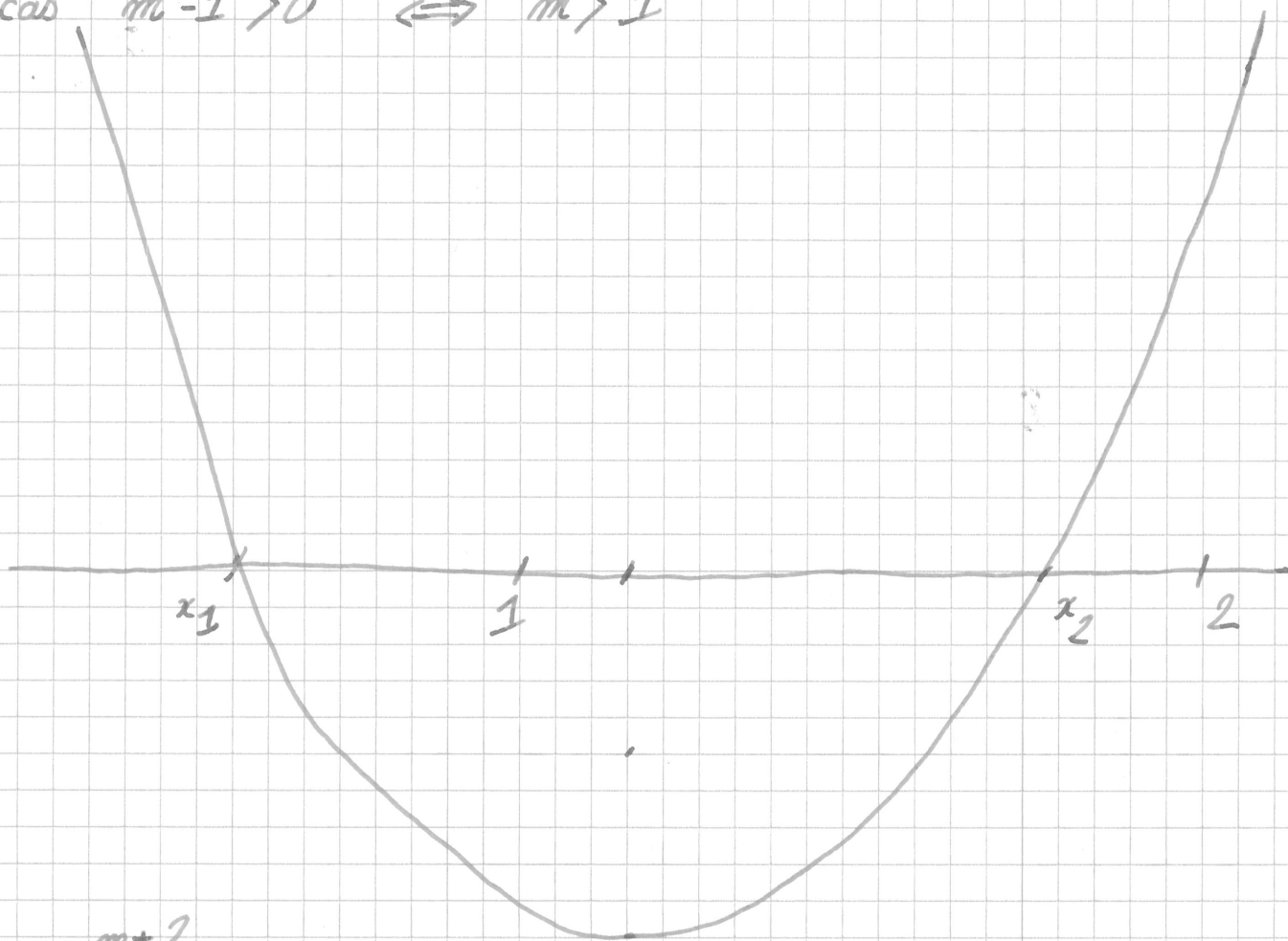
$$-(-2)^2 - (-2) + 3 = -4 + 2 + 3 > 0 \text{ donc } -2 \in \left] -\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right]$$

(2)

 β admet 2 racines distinctes

$$\Leftrightarrow m \neq 1 \text{ et } m \in \left] \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right[$$

car $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$



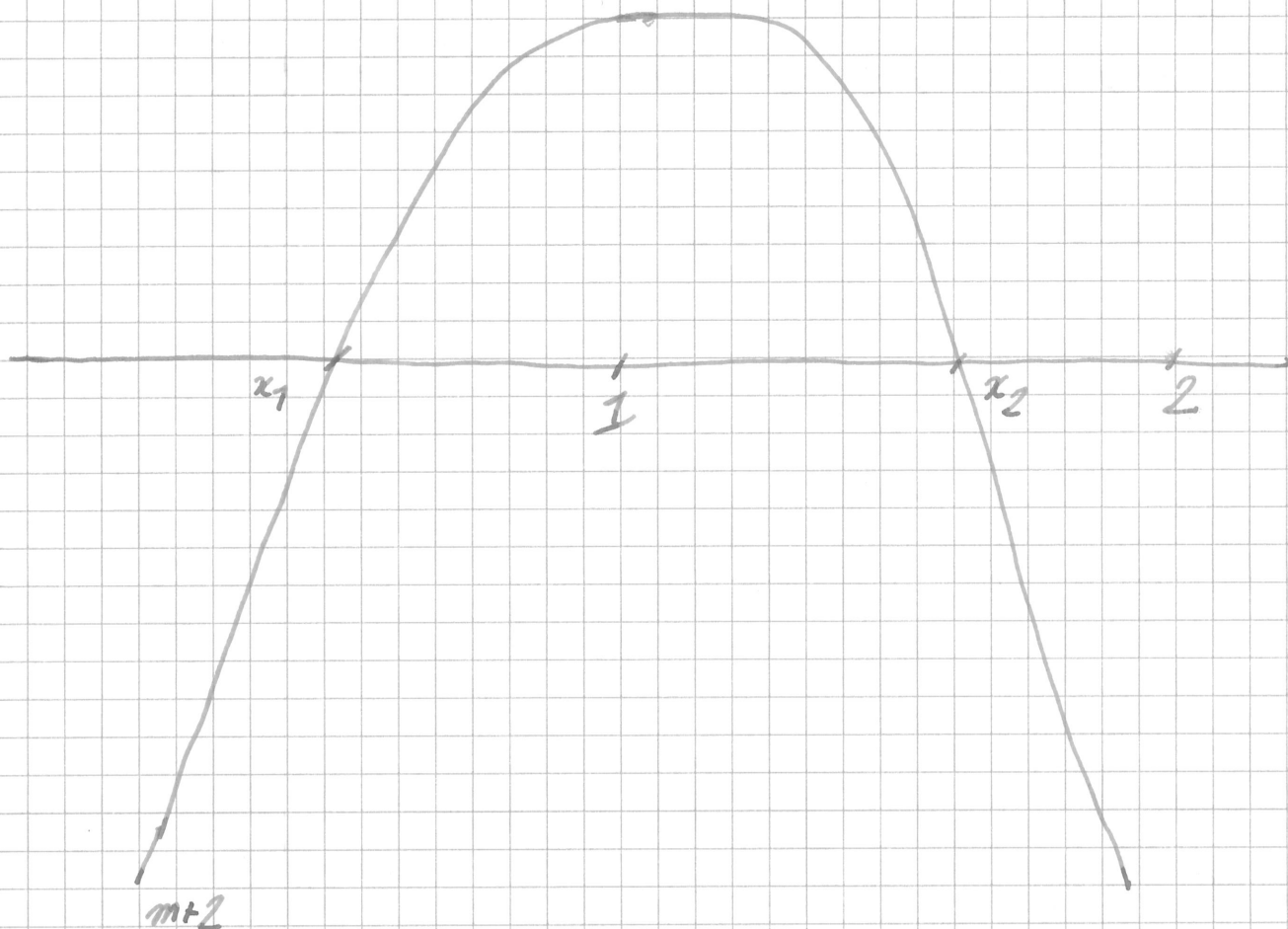
$$\begin{array}{l} m+2 \\ \parallel \\ \beta(1) \leq 0 \\ \beta(2) \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1 \leq x_2 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta(2) &= 4(m-1) - 4m + 2m + 3 \\ &= 4m - 4 - 4m + 2m + 3 = 2m - 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m \leq -2 \text{ et } m \geq \frac{1}{2} \quad \text{impossible}$$

$$\cos m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$$

(4)



$$\begin{cases} b(1) \geq 0 \\ b(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1 \leq x_2 \\ \text{or } x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \geq 0 \\ 2m-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{4} > 0 \text{ donc } \frac{1}{2} \in \left] \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right]$$

Bilan

$$x_1 \leq 1 \leq x_2 \leq 2 \Leftrightarrow m \in \left[-2, \frac{1}{2} \right]$$

$$x_1 < 1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow m \in \left] -2, \frac{1}{2} \right]$$

(5)

$$\text{car } m = -2$$

$$-3x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Delta' = 4 - (-1)(-3) = 1$$

$$x = \frac{-2 \pm 1}{-3} = \frac{2 \pm 1}{3}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad 1 \text{ ou } 1/3$$

$$x_1 = 1/3 \quad x_2 = 1$$

$$\text{donc } m = -2 \text{ marche}$$

Bilan

$$x_1 < 1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow m \in [-2, 1/2]$$

Exercice 2

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall x > \delta \\ f(x) < A$$

Exercice 3

$$1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\setminus \{a\} \\ f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$$

$$\varepsilon = 1 \quad \forall x \in]a-\eta, a+\eta[$$

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq 1 + |l|$$

(6)

(2) Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tq} \quad \forall x \in]a-\delta, a+\delta[\quad \frac{|f(x) - \ell|}{1+|f|+|m|} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists \delta' > 0 \quad \text{tq} \quad \forall x \in]a-\delta', a+\delta'[\quad \frac{|g(x) - m|}{1+|g|+|m|} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{|f(x)g(x) - \ell m|}{1+|f|+|m|} \leq \frac{(1+|g|)\varepsilon}{1+|g|+|m|} + \frac{\varepsilon|m|}{1+|g|+|m|}$$

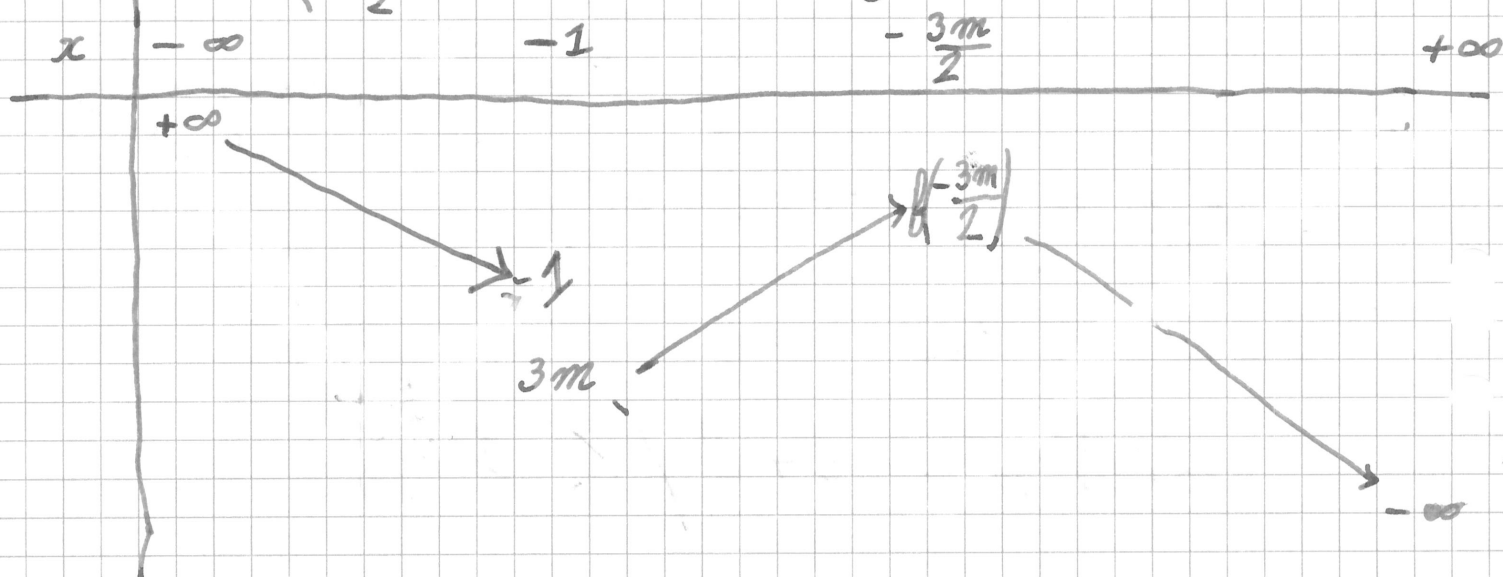
$$= \varepsilon$$

Exercice 4

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} e^{(x^2-1)} - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 - 3mx + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1°) $e^{x^2-1} - 2$ est paire et croissante sur $\mathbb{R}^+$
 $-x^2 - 3mx + 1$ admet son maximum en $-\frac{b}{2a} = \frac{3m}{-2} = -\frac{3m}{2}$

$$\text{car } -1 < -\frac{3m}{2} \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} -(-1)^2 - 3m(-1) + 1 = -1^2 + 3m + 1 = 3m = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \quad (7)$$

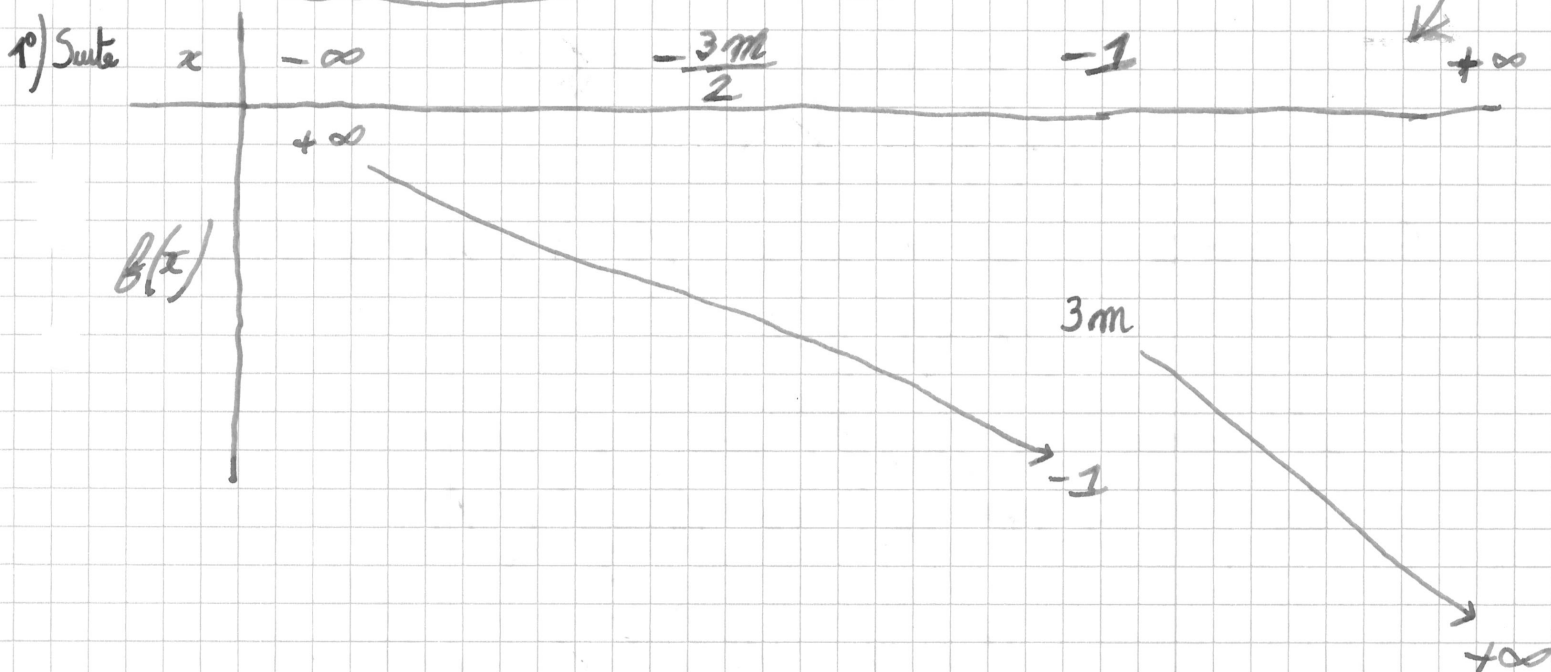
~~Il est~~ $\forall y \in]3m, f(-\frac{3m}{2})[$ $-x^2 - 3mx + 1$ admet
2 racines dans $]-1, +\infty[$ donc f n'est pas injective
~~monotone~~

$$\text{car } -1 > -\frac{3m}{2} \Leftrightarrow m > \frac{2}{3} \text{ donc } 3m > 2 > -1$$

~~Il~~

2°) f admet une limite en -1

$$\text{car } 3m = -1 \Leftrightarrow m = -1/3$$



donc f n'est pas injectif dans le cas $-1 > -\frac{3m}{2}$

$\forall m \in \mathbb{R} \quad f \text{ n'est pas injectif}$

Exercice 5

8

1)

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\xrightarrow{\tan}]-\infty, +\infty[$$

↔
continuité

$$f(x) \text{ est définie} \Leftrightarrow x^2 + \tan x + 2 = 0$$

$$\tan x > -\frac{\pi}{2} \text{ donc } x^2 + \tan x + 2 > 0 + -\frac{\pi}{2} + 2 > 0$$

donc f est définie sur $\mathbb{R}$

2°)

$$x^2 + \tan x + 2 > x^2$$

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{|x| + 2}{x^2} \xrightarrow{\text{quand } |x| \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \text{ tq } \forall x \geq A$$

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leq \varepsilon$$

$$\exists B < 0 \text{ tq } \forall x \leq B$$

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leq \varepsilon$$

$$\text{Prendre } \varepsilon = 1 \quad \exists A \text{ et } B \text{ tq } \forall x \geq A \text{ ou } x \leq B$$

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leq 1$$

f continue sur $[A, B]$ donc f bornée

$$\text{donc } \exists M \in \mathbb{R} \text{ tq } \frac{|f(x)|}{|x|} \leq M$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \max(M, 1)$$

2^{ème} méthode $\forall |x| \geq 1$

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{|x| + 2}{x^2} = \frac{1}{|x|} + \frac{2}{|x|^2} \leq 1 + 2 = 3$$

f continue sur $[-1, 1]$ donc f bornée sur $[-1, 1]$.

Exercise 5

9

3)

$$f(x) = \frac{x \sin x - 2 \cos x}{|x| + \sin x + 2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| + \sin x + 2 > 0$$

donc f défini sur $\mathbb{R}$

$$|x| + \sin x + 2 > |x|$$

$$\text{donc } |f(x)| \leq \frac{|x| + 2}{x^2}$$

Cela ne change rien!

