

①

Corrigé Contrôle continue Fondements Mathématiques

Exercice 1

$$1) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]a-\delta, a+\delta[, f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$$

$$2) f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow f \text{ admet } f(a) \text{ comme limite en } a$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]a-\delta, a+\delta[$$

$$f(x) \in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$$

$$f \text{ pas continue en } a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } \forall \delta > 0 \exists x \in]a-\delta, a+\delta[\text{ tq } f(x) \notin]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$$

Exercice 2

$$1) \frac{2x^2 - x}{2x} = x - \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{quand } x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} x^3 - 8x - 3 \xrightarrow{x \rightarrow 3} 3^3 - 8 \times 3 - 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow 3} 9 - 12 + 3 = 0 \end{array} \right\} \text{forme indéterminée } \frac{0}{0}$$

Poseons $x = 3+h$. Quand $x \rightarrow 3$, h tends vers 0

$$\begin{aligned} x^3 - 8x - 3 &= (3+h)^3 - 8(3+h) - 3 \\ &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 h + 3 \times 3 h^2 + h^3 - 24 - 8h - 3 \\ &= 19h + 9h^2 + h^3 \end{aligned}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (3+h)^2 - 4(3+h) + 3 = 9 + 6h + h^2 - 12 - 4h + 3$$

(2)

$$= 2h + h^2$$

$$\text{donc } \frac{x^3 - 8x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{19h + 9h^2 + h^3}{2h + h^2} = \frac{19 + 9h + h^2}{2 + h} \xrightarrow{\text{quand } h \rightarrow 0} \frac{19}{2}$$

3)

$$\frac{(1-2x) \sin x}{\tan x} = \frac{(1-2x) \sin x \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{(1-2x) \cancel{\sin x} \cos 2x}{2 \cos x \cancel{\sin x}}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1 \times 1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$4) \quad x - \sqrt{x^2 + 4} = \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + 4})^2}{(x + \sqrt{x^2 + 4})} = \frac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{+\infty + +\infty} = 0$$

Exercice 3

Andan est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

On est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

$f(x)$ définie $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+*}$

Le domaine de définition est $\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{x^2 - \text{and} (x+1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{0 - \text{and} 1}{0^+} = \frac{-\pi/4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

(3)

Donc f admet la droite d'équation $x=0$ comme asymptote en 0^+

$$\frac{x^2 - \arctan(x+1)}{x} = x - \frac{\arctan(x+1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty - \frac{\pi/2}{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{\arctan(x+1)}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 - 0 + 0 = 1$$

donc f admet la droite d'équation $y = 1 \times x$ comme direction asymptotique

$$f(x) - x = -\frac{\arctan(x+1)}{x} + \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + +\infty = +\infty$$

donc f n'admet pas de droite asymptote en $+\infty$

f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$

Exercice 4

$$1) |x^2 - 2x| > x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \text{ou} \\ |x^2 - 2x| > |x| \text{ et } x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x^2 - 2x| > |x| \Leftrightarrow |x| |x-2| > |x|$$

$$\Leftrightarrow |x-2| > 1 \text{ et } |x| \neq 0$$

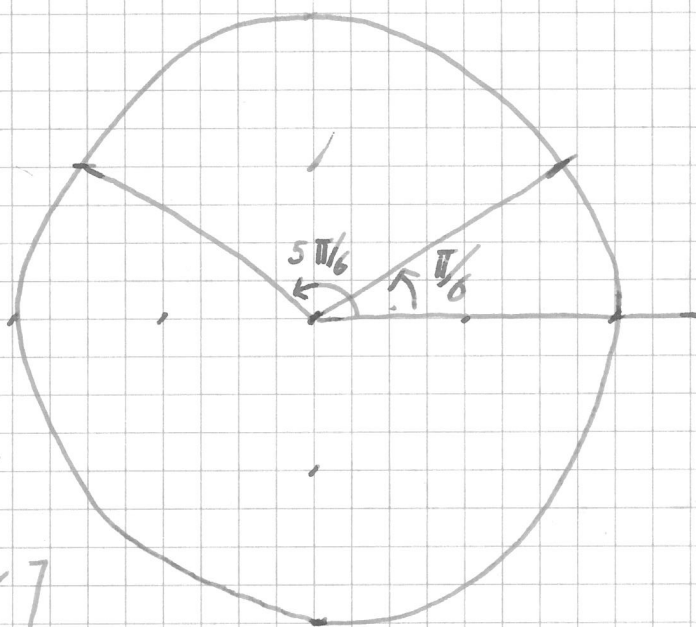
$$\Leftrightarrow \left(x-2 > 1 \text{ ou } x-2 < -1 \right) \text{ et } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x > 3 \text{ et } x < 1 \right) \text{ et } x \neq 0$$

$$\text{Règle }]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]3, +\infty[$$

$$2) \quad x \in [0, \pi[$$

$$\Leftrightarrow 2x \in [0, 2\pi[$$



$$\text{Donc } 2x \geq \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right]$$

Exercice 5

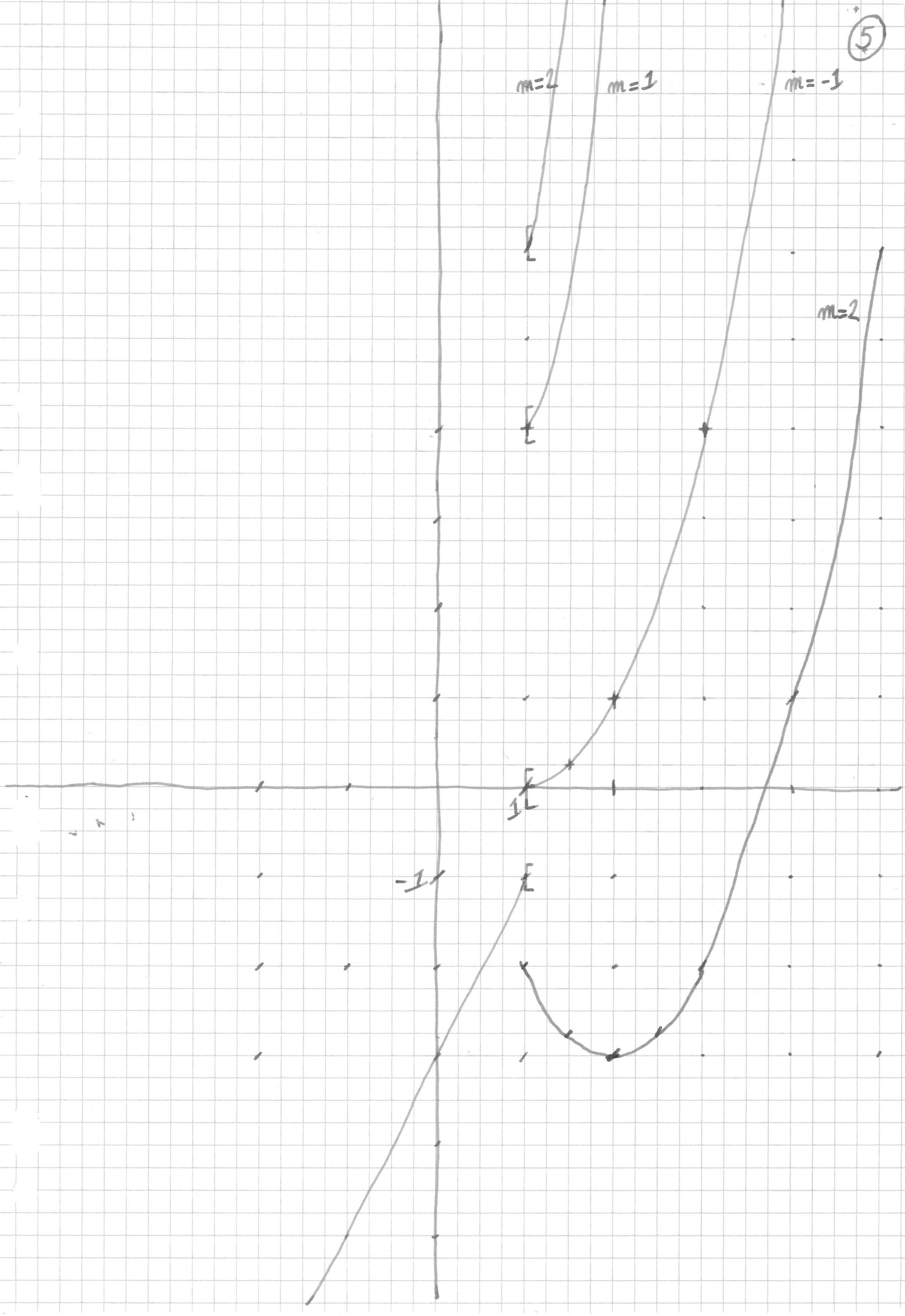
$$1^{\circ}) \quad \cos m = -1 \quad f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \text{ et } x \geq 1$$

$$\cos m = 1 \quad f(x) = (x+1)^2 \text{ et } x \geq 1$$

$$\cos m = 2 \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3 \text{ et } x \geq 1$$

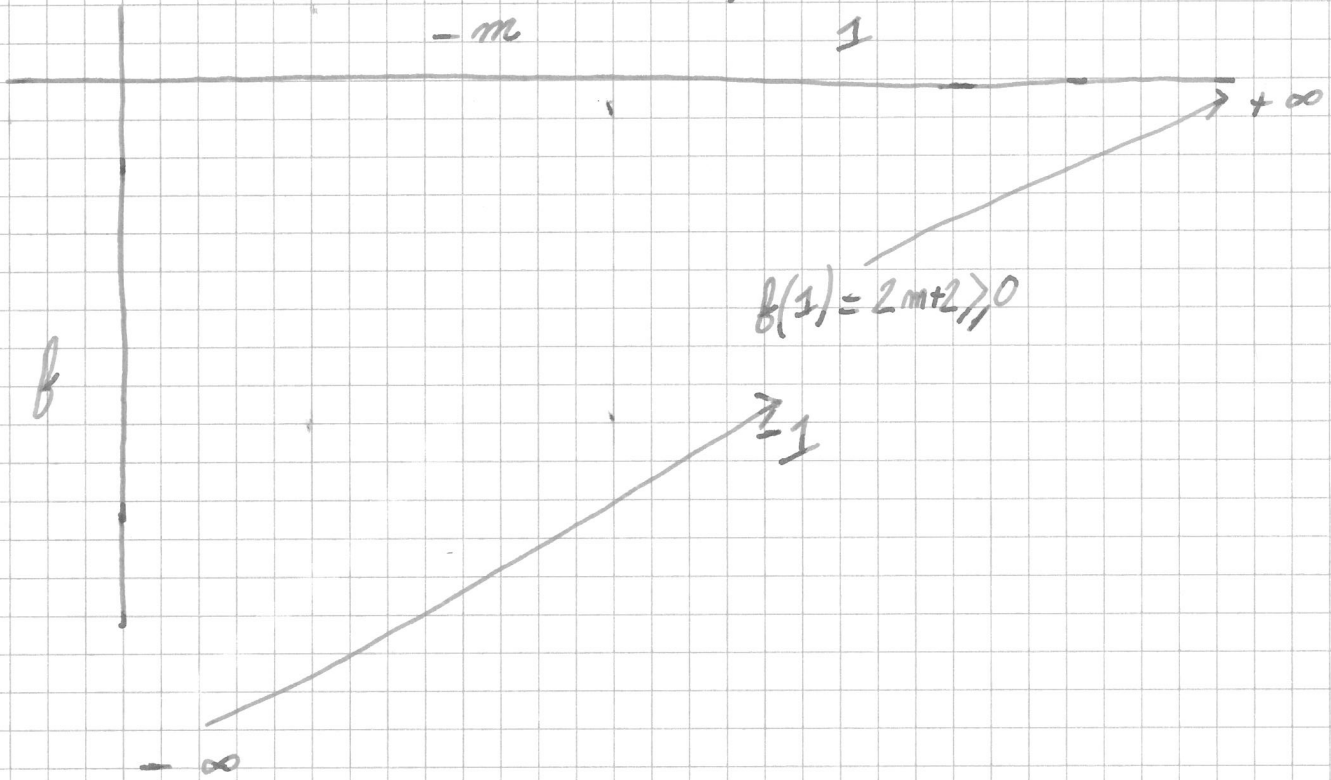
$$\cos m = -2 \quad f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3 \text{ et } x \geq 1$$

⑤



2) $x^2 + 2mx + 1 = (x+m)^2 + 1 - m^2$ admet son

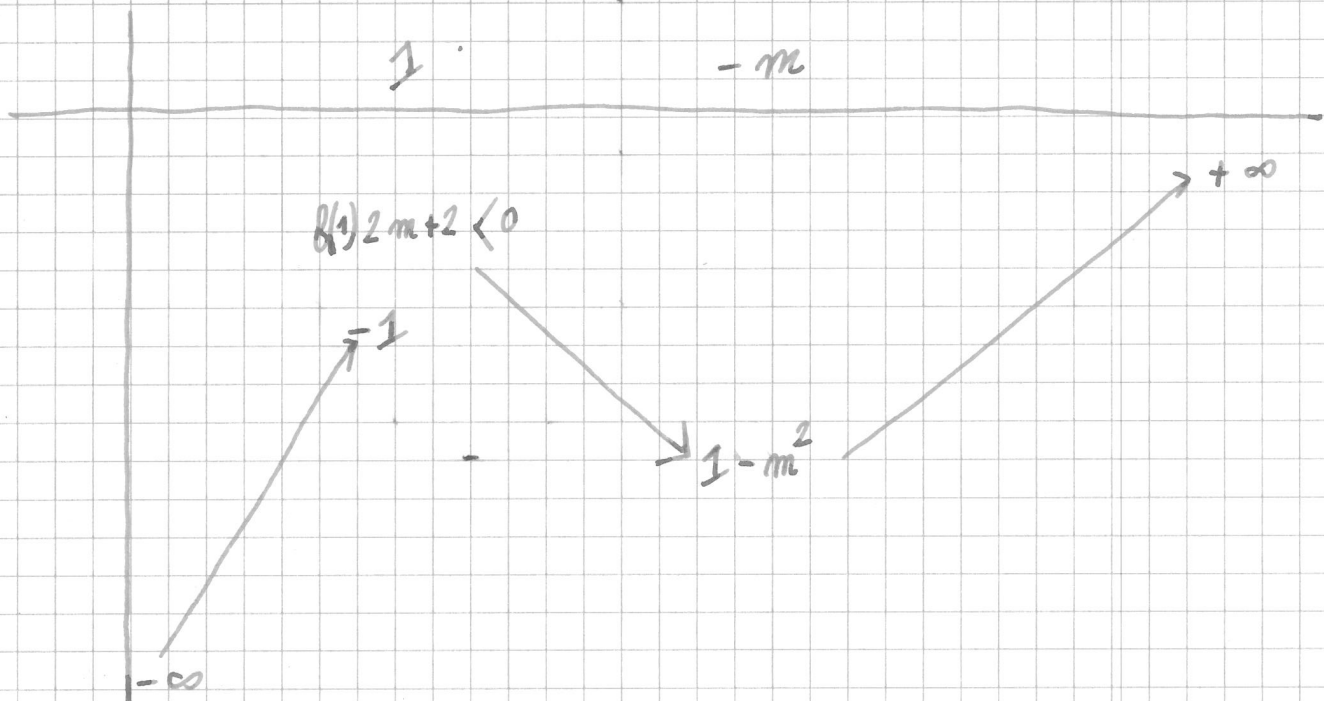
cas $-m \leq 1$ minimum $1 - m^2$ quand $x = -m$
 cas $m > -1$



$f(1) = 2m+2 > 0$

Il y a un point en $x=1$ donc pas négatif

cas $-m > 1$ cas $m < -1$



$f(1) = 2m+2 < 0$

$1 - m^2$

(7)

$$f \text{ est surjectifssi } 1 - m^2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq m^2 \Leftrightarrow m \leq -\sqrt{2} \text{ ou } m \geq \sqrt{2}$$

Bilan f surjectif $\Leftrightarrow m \leq -\sqrt{2}$

