

Contrôle continue fondements Analyse 2008

Exo 1

1. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |x_n - l| < \varepsilon$$

Remarque: On peut remplacer l'inégalité large $|x_n - l| < \varepsilon$ par l'inégalité stricte $|x_n - l| \leq \varepsilon$

2. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, x_n \geq A$$

3. Cas $q \neq 1$

la suite $x_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q .

La suite $y_n = q + q^2 + \dots + q^n$ est

la somme des premiers termes d'une suite géométrique dont on connaît la formule par cœur

$$y_n = \underset{\substack{\uparrow q \\ 1^{\text{er}} \text{ terme de la somme}}}{1} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

← nombre de termes dans y_n

Démonstration par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad q + \dots + q^n = q \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ②

$n = 1 \quad q = q \frac{1-q^2}{1-q}$ vérifier

Supposons que au rang $n \quad q + \dots + q^n = q \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

alors $q + \dots + q^n + q^{n+1} = q \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$
 $= q \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} = q \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q}$

donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n+1$.

2^{ème} démonstration de $q + \dots + q^n = q \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$(q + \dots + q^n) \times (1-q)$
 $= q + \dots + q^n - q^2 - \dots - q^{n+1} = q - q^{n+1}$
 $= q(1-q^{n+1})$ donc $(q + \dots + q^n) = q \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Cas $q = 1 \quad x_n = 1 \quad y_n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} = n$

4. Soit $\alpha < 0$ donc $q = \exp(\alpha) \in]0, 1[$

donc $y_n = \exp(\alpha) \frac{1 - (\exp(\alpha))^{n+1}}{1 - \exp(\alpha)} \longrightarrow \exp(\alpha) \frac{1}{1 - \exp(\alpha)}$

car la suite géométrique $(\exp(\alpha))^n$ converge vers 0

Exercice 2

(3)

a) $x_n = e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h - 0} =$ dérivée en 0 de $\ln(1+h)$

$\ln(1+h)' = \frac{1}{1+h}$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{1+0} = 1$

donc par composition $n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{quand } n \rightarrow +\infty} 1$

donc $n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) = n \cdot n \ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{\text{quand } n \rightarrow +\infty} +\infty \times 1 = +\infty$

donc $x_n \xrightarrow{\text{quand } n \rightarrow +\infty} +\infty$

b) $x_n = e^{\sqrt{n} \ln(1 + \frac{1}{n})}$

on a vu que $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{\text{quand } n \rightarrow +\infty} 1$

donc $\sqrt{n} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} n \ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{\text{quand } n \rightarrow +\infty} 0 \times 1 = 0$

donc $x_n \xrightarrow{\text{quand } n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$

Exercice 3

(4)

$$a) \quad \frac{\text{Arctan } x}{x} = \frac{\text{Arctan } x - \text{Arctan } 0}{x - 0} \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} \text{la}$$

deuxième de Arctan en 0

$$(\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{Arctan } x}{x} = \frac{1}{1+0^2} = 1$$

b)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{Arctan } x}{x} = 1 \neq 0 = f(0)$$

donc f n'est pas continue en 0.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ différent de 0

Arctan est continue en x_0

Donc le quotient $\frac{\text{Arctan } x}{x}$ est aussi continu en x_0

car le dénominateur x est une application continue

en x_0 qui ne s'annule pas en x_0

Donc f est continue en x_0

Bilan f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (seulement)

(5)

on dit que

Le domaine de continuité de f est $\mathbb{R}^*$

$$c) \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} \text{la limite de } \sin \text{ en } 0$$

$$(\sin)'(x) = \cos x \text{ donc } (\sin)'(0) = 1$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Donc d'après a)}$$

$$d) \frac{f(x)}{\sin x / x} \xrightarrow{x \neq 0} \frac{1}{1} = 1$$

$$c \text{ à } d \quad f(x) \sim \frac{\sin x}{x} \text{ quand } x \rightarrow 0$$