

Corrigé Contrôle continue L1

Algèbre 2008

Exercice 1

1) F est ev de $E \iff F$ est non videet $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda x + \mu y \in F$ stable par combinaison

linéaire

2) $\{a_1, \dots, a_n\}$ est une famille génératrice de E

$$\iff E = \text{vect}(a_1, \dots, a_n)$$

$$\iff \forall x \in E \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

$$\text{t.q. } x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

3) $\{a_1, \dots, a_n\}$ est une famille libre de E

$$\iff \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

$$\left(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$$

Exercice 2

(2)

$$(1,1) \text{ et } (1,-1) \in E$$

$$\text{mais } (1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin E$$

donc E n'est pas un s.e.v

Exercice 3

$\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3

le cardinal de la famille est 4 donc la

famille n'est pas libre dans $\mathbb{R}_2[X]$

$$\text{c.à.d. } \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0) \text{ tq}$$

$$\lambda_1(2+X) + \lambda_2(4+5X+8X^2) + \lambda_3(1+X+12X^2) + \lambda_4(47+5X^2) = 0$$

donc la famille n'est pas libre dans $\mathbb{R}_3[X]$

2) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\text{tq } \lambda_1(2+X) + \lambda_2(1+X+X^2) + \lambda_3(6-X+2X^2) = 0$$

$$(\lambda_2 + 2\lambda_3)X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)X + 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 & L_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 & L_2' = L_2 - L_1 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 & L_3' = L_3 - L_1 \end{cases}$$

(3)

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 & L_2' \\ 10\lambda_3 = 0 & L_3' - 2L_2' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

3) 1, 2, 3, 4

4) 1, x, x², 1+x+x² famille génératrice
pas libre. De manière générale

une famille à 4 vecteurs dans un espace de dim 3
n'est jamais libre

Exercice 4

1) $E = \{(x, y, z) \text{ tq } x+y+z=0\}$

2) Soit (x, y, z) et $(x', y', z') \in E$

Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \text{on a bien } & (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') \\
 &= \lambda (x + y + z) + \mu (x' + y' + z') \\
 &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

donc $\lambda (x, y, z) + \mu (x', y', z') \in E$
 et aussi du même les vecteurs en colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ donc E n'est pas vide

$$3) \quad (1, 0, 0) \notin E \quad \text{donc} \quad E \neq \mathbb{R}^3$$

$$E \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{donc} \quad \dim E \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Si $\dim E = 3$ alors comme $E \subset \mathbb{R}^3$

$$\text{et } \dim E = \dim \mathbb{R}^3 \quad E = \mathbb{R}^3$$

donc contradiction donc $\dim E \leq 2$

$$4) \quad \text{Montrons que } u_1 \text{ et } u_2 \text{ famille libre de } E$$

$$x u_1 + y u_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

est égal au vecteur nul

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -x = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \quad \text{donc}$$

(5)

la famille u_1 et u_2 est libre

$$1 + (-1) + 0 = 0 \quad \text{donc} \quad u_1 \in E$$

$$1 + 0 + (-1) = 0 \quad \text{donc} \quad u_2 \in E$$

donc u_1, u_2 famille libre de E donc $\dim E \geq 2$

donc d'après 3) $\dim E = 2$

$\{u_1, u_2\}$ famille libre à 2 éléments dans un

espace vectoriel de dimension 2 donc $\{u_1, u_2\}$

est une base de E

$$5) \quad 2 + 3 + (-5) = 0 \quad \text{donc} \quad u \in E$$

$$\text{On cherche } u = x u_1 + y u_2$$

$$c \text{ à d } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 3 &= -x \\ -5 &= -y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= -3 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Donc $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de u dans

la base $\{u_1, u_2\}$