

EXAMEN du 27 juin 2008
14h - 16h30

EXERCICE 1.

1. Donner le développement limité d'ordre 2 des fonctions suivantes en $x_0 = 0$:

(a) $f(x) = \sin(x)$,

(b) $f(x) = \cos(x)$,

(c) $f(x) = \tan(x)$,

(d) $f(x) = \exp(x)$,

(e) $f(x) = \ln(x + 1)$.

2. Etudier l'existence et, le cas échéant, donner la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) \cos(x) - \exp(x) \tan(x)}{\ln(x + 1) - x} \right)$$

EXERCICE 2. Soit f la fonction à valeurs réelles définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ \sinh(x) + \cosh(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

où $\sinh(\cdot)$ et $\cosh(\cdot)$ désignent sinus et cosinus hyperboliques respectivement.

1. Etudier l'existence et, le cas échéant, donner la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

2. Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.



EXERCICE 3. Soit y une fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles vérifiant:

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0 \quad (1)$$

1. On considère l'équation:

$$3y' + y^2 = 0 \quad (2)$$

Notons que $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, est une solution. En introduisant la nouvelle fonction $z(x) = 1/y(x)$, $y(x) \neq 0$, obtenir une nouvelle équation, qu'on résoudra.

2. Chercher une solution particulière de l'équation (1) de la forme : $f_1(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

ou de la forme $f_1(x) = \frac{\alpha}{x}$

3. Donner toutes solutions de l'équation (1).

EXERCICE 4. On considère une courbe définie par:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3}, \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}, \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1. Donner les tableaux de variation de x et de y .
2. Donner des points stationnaires et étudier leurs natures.
3. Etudier des branches infinies de la courbe. Préciser leurs natures.

Corrigé 2^{ème} session Analyse 2007-8

Exercice 1 1.
14h10

a) sin impaire donc que des termes impaires

$$\sin x = x + x^3 \varepsilon(x)$$

en appliquant Taylor-Young

b) cos paire donc que des termes paires

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 \varepsilon(x)$$

c) tan impaire

$$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$(\tan)'(0) = 1 + 0^2 = 1$$

$$\tan x = x + x^3 \varepsilon(x)$$

d) $\rightarrow$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$$

e)

$$\ln 1+x = x - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$$

(2)

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos x - \exp x \tan x \longrightarrow 0 \times 1 - 1 \times 0 = 0$$

quand $x \rightarrow 0$

$$\ln(x+1) - x \longrightarrow \ln 1 - 0 = 0$$

quand $x \rightarrow 0$

donc forme indéterminée $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \ln(x+1) - x &= x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) - x \\ &= -\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cos x &= \left(x + x^2 \varepsilon(x) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \right) \\ &= x \left(1 + x \varepsilon(x) \right) \left(1 + x \varepsilon'(x) \right) \end{aligned}$$

en posant $\varepsilon'(x) = -\frac{x}{2} + x \varepsilon(x)$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos x = x \left(1 + x \varepsilon''(x) \right) = x + x^2 \varepsilon''(x)$$

De même, on montre que

$$\begin{aligned} e^x \tan x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \right) \left(x + x \varepsilon(x) \right) \\ &= x + x^2 + x^2 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

donc

(3)

donc

$$\begin{aligned}
& \frac{\lim x \cos x - e^x \tan x}{\ln(x+1) - x} \\
&= \frac{x + x^2 \varepsilon''(x) - (x + x^2 + x^2 \varepsilon(x))}{-\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)} \\
&= \frac{-x^2 + x^2 \varepsilon'''(x)}{-\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)} = \frac{\cancel{x^2} \frac{-1 + \varepsilon'''(x)}{2}}{\cancel{x^2} \frac{-1/2 + \varepsilon(x)}{2}} \rightarrow \frac{-1/2}{-1/2} = 1
\end{aligned}$$

quand $x \rightarrow 0$

14h30

Exercice 2

$$1^\circ) \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{donc } \sinh(x) + \cosh(x) = e^x \xrightarrow{\text{quand } x \rightarrow 0} e^0 = 1$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1. \text{ Comme } f(x) \text{ est}$$

$$\text{égal à } 1 \text{ sur } \mathbb{R}^-, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1. \text{ Donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

2°) D'après 1°) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

$$f(0) = \sinh(0) + \cosh(0) = e^0 = 1$$

(4)

donc f est ~~pas~~ continue en 0

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, $f = \sinh h + \cosh h$ est continue

Sur $\mathbb{R}^{-*}$, $f = 1$ est continue

Bilan
 f est
 continue sur $\mathbb{R}$

3°) Si $x \geq 0$, $f(x) = e^x$ $(e^x)'(0) = e^0$

donc f est dérivable à droite en 0

de dérivée $f'_d(0) = e^0 = 1$

Si $x < 0$ $f(x) = 1$

donc f est dérivable à gauche en 0

de dérivée $f'_g(0) = 0$

Comme $f'_d(0) = 1 \neq 0 = f'_g(0)$

f n'est pas dérivable en 0.

(5)

Exercice 3

(1) est une équation de Riccati.

1.

$$y = \frac{1}{y} \quad \text{donc} \quad y = \frac{1}{y}$$

$$\text{donc} \quad y' = \frac{-y'}{y^2}$$

$$\text{donc} \quad 3y' + y^2 = \frac{-3y'}{y^2} + \frac{1}{y^2}$$

$$\text{donc} \quad 3y' + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3y' + 1}{y^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{3}$$

$$\text{donc} \quad y = \frac{1}{3}x + C$$

où C constante réelle

$$\text{donc} \quad y = \frac{1}{x/3 + C}$$

2. On cherche une solution particulière

$$\text{sous la forme } y = f_1(x) = \frac{\alpha}{x}$$

$$y' = -\frac{\alpha}{x^2}$$

(6)

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 3 \frac{-\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

racines entières $\alpha = 1$ ou 2

donc $\frac{1}{x}$ ou $\frac{2}{x}$ sont des solutions particulières

3. Posons $y = y - \frac{1}{x}$ donc $y = y + \frac{1}{x}$

$$y' = y' + \frac{1}{x^2} \quad y' = y' - \frac{1}{x^2}$$

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 3\left(y' - \frac{1}{x^2}\right) + \left(y + \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2}{x^2}$$

$$= 3y' - \frac{3}{x^2} + y^2 + \frac{1}{x^2} + 2\frac{y}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$= 3y' + y^2 + \frac{2y}{x} = 0$$

on s'est ramené à une équation de Bernoulli

$$\Leftrightarrow \frac{3y'}{y^2} + \frac{2}{y}x + 1 = 0$$

$$\text{Posons } u = \frac{1}{y} \quad u' = -\frac{y'}{y^2}$$

(7)

$$\frac{3y'}{y^2} + \frac{2}{yx} + 1$$

$$= -3u' + \frac{2u}{x} + 1 = 0$$

on s'est ramené à une équation linéaire

du 1^{er} ordre avec 2nd membre

$$-3u' + \frac{2u}{x} = 0$$

$$\Rightarrow 3u' = \frac{2u}{x} \Rightarrow \frac{u'}{u} = \frac{2}{3x}$$

$$(\ln u) = \frac{2}{3} \ln x$$

$$u = C x^{2/3} \quad \text{ou } C \text{ constante réelle}$$

méthode de variation de la constante On cherche $u(x) = C(x) x^{2/3}$

$$u' = C' x^{2/3} + C \frac{2}{3} x^{2/3-1}$$

$$-3u' + \frac{2u}{x} = -3C' x^{2/3} - \cancel{2} C \frac{2}{3} x^{-1/3} + 2C \frac{x^{2/3}}{x} = -3C' x^{2/3}$$

est égal à -1 or

$$C' x^{2/3} = \frac{1}{3}$$

$$C' = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$C = x^{1/3}$$

donc $u = x^{1/3} x^{2/3} = x$

est solution particulière

de $-3u' + \frac{2u}{x} + 1 = 0$

Les solutions (sur $\mathbb{R}^{+*}$) de $-3u' + \frac{2u}{x} + 1 = 0$ sont $u = C x^{2/3} + x$

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{C x^{2/3} + x}$$

$$y = \frac{1}{C x^{2/3} + x} - \frac{1}{x}$$

ou 2) on peut aussi chercher une solution particulière

de la forme $y = x^\alpha$

$$y = x^\alpha \quad y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 3\alpha x^{\alpha-1} + x^{2\alpha} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha x^{\alpha+1} + x^{2\alpha+2} + 2 = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

en prenant $x = 1$ on obtient que

$$3\alpha + 1 + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

Réciproquement si $\alpha = -1$

$$3\alpha x^{\alpha+1} + x^{2\alpha+2} + 2 = 3(-1)x^0 + x^0 + 2 = 0$$

on a donc trouvé que $x^{-1} = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.

Exercice 4

9

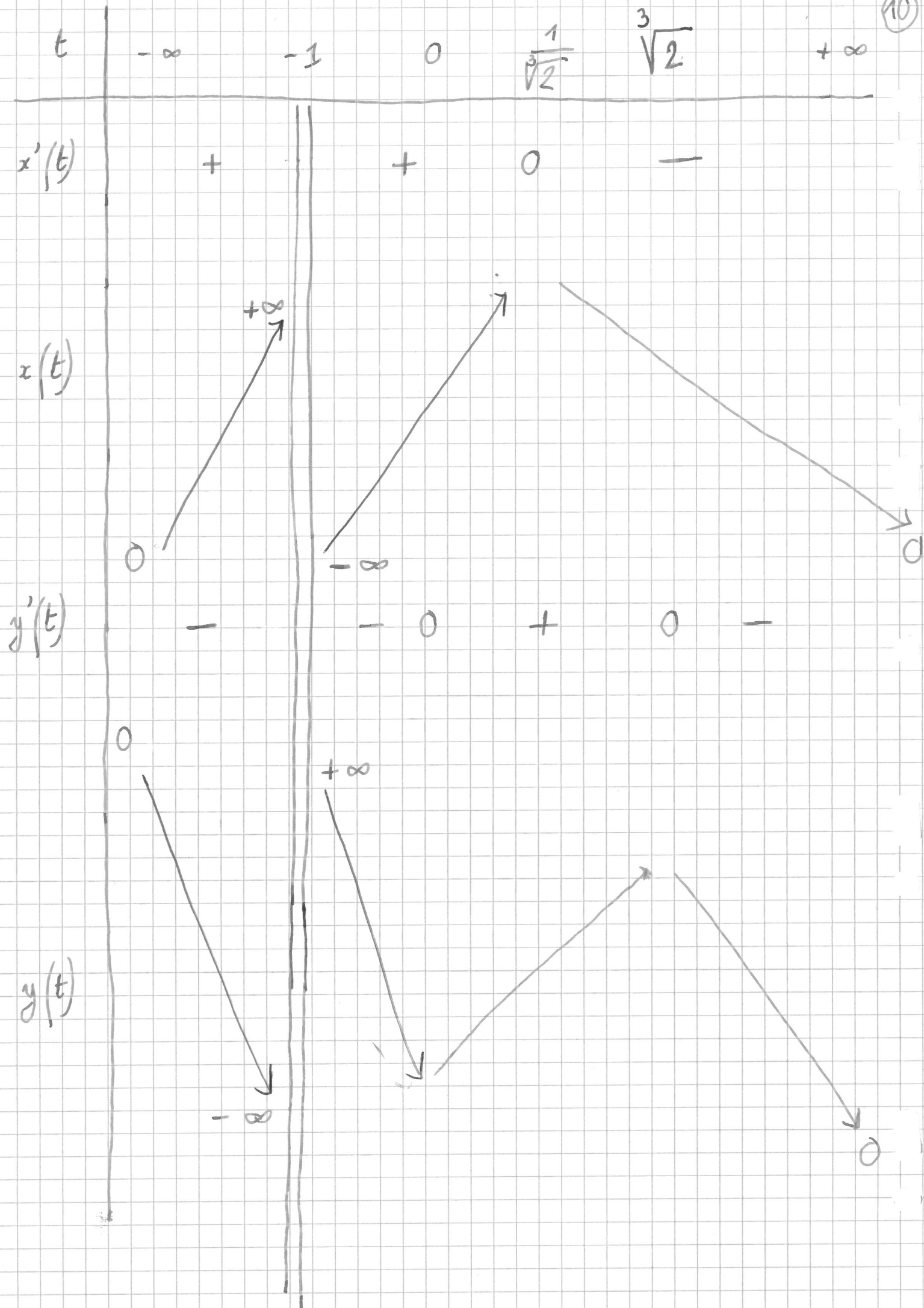
1°)

$$1 + t^3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1 \times (1+t^3) - 3t^2 \times t}{(1+t^3)^2} \\ &= \frac{1 - 2t^3}{(1+t^3)^2} \end{aligned}$$

$$1 - 2t^3 = 0 \Leftrightarrow t^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{2t(1+t^3) - 3t^2 \times t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{2t + 2t^4 - 3t^4}{(1+t^3)^2} \\ &= \frac{2t - t^4}{(1+t^3)^2} = \frac{t(2 - t^3)}{(1+t^3)^2} \end{aligned}$$



2. Un point est stationnaire si $x'(t) = y'(t) = 0$

Il n'y a donc aucun point stationnaire !

3. • en $+\infty$ et en $-\infty$

$$x(t) \sim \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2} \xrightarrow{\text{quand } t \rightarrow +\infty} 0$$

idem quand $t \rightarrow -\infty$

$$y(t) \sim \frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t} \xrightarrow{\text{quand } t \rightarrow +\infty} 0$$

idem quand $t \rightarrow -\infty$

donc quand $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$,

le courbe tend vers le point O de coordonnées

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc on a pas une branche infinie}$$

• en $t = -1$

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{t}{1+t^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} \frac{t}{1+t^3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} y(t) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} y(t) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t \longrightarrow -1 \text{ quand } t \rightarrow -1$$

$$y(t) - (-1)x(t) = \frac{t^2 + t}{1 + t^3}$$

$$= \frac{t(t+1)}{t^3+1}$$

Posons $t = -1 + h = h - 1$ quand $t \rightarrow -1$
 h tendant vers 0

$$t^3 = h^3 - 3h^2 + 3h - 1$$

donc $y(t) - (-1)x(t) = (h-1) \frac{h}{h^3 - 3h^2 + 3h - 1 + 1}$

$$= (h-1) \frac{1}{h^2 - 3h + 3} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{3}$$

donc la courbe admet la droite
 d'équation $y = -x - \frac{1}{3}$ comme
 asymptote