

Théorèmes globaux et applications

def Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme

$$[a, b],]a, b[, [a, b[,]a, b] \text{ où } a \leq b$$

$$]-\infty, a[,]-\infty, a],]a, +\infty[, [a, +\infty[,]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Exemple $\{a\}, \emptyset$ sont des intervalles

Th^(admis) Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle

$$\text{ssi } \forall x, y \in I \quad x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset I$$

ou $]x, y[$ possible

Soit I un intervalle

def Une application f est continue sur I

si f est continue en tout point intérieur de I
et f continu soit à gauche soit à droite sur les
extrémités éventuelles de I

$$\Leftrightarrow \forall a \in I, f \text{ admet } f(a) \text{ comme limite en } a$$

sur tout I

$$\Leftrightarrow \forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in I \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

(1) Théorème des valeurs intermédiaires Soit I un intervalle

Soit f une application continue sur I à valeurs réelles.

Soient $a < b \in I$ quelconques

Si λ se trouve ^{strictement} entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[$

$$\text{tq } f(c) = \lambda$$

Remarque : $a, b \in I$. Donc comme I est un intervalle

$]a, b[\subset I$ donc $c \in I$ donc $f(c)$ est forcément défini

(2) Théorème des valeurs intermédiaires (bis)

Soit I un intervalle.

Soit f une application continue en I à valeurs réelles
alors $f(I)$ son ensemble image est un intervalle

"L' image continue d'un intervalle est un intervalle"

Preuve de (1) équivaut à (2)

Supposons (1). Montrons (2)

Soient $x, y \in f(I)$ tq $x \leq y$. A dom $]x, y[\subset f(I)$

$$\exists d, e \in I \text{ tq } x = f(d) \text{ et } y = f(e)$$

cas $d < e$ on pose $a = d$ et $b = e$

$$x = f(a) \quad y = f(b)$$

$\forall \lambda \in]x, y[$ λ se trouve strictement entre $f(a)$ et $f(b)$

$$\text{donc } \exists c \in]a, b[\text{ tq } \lambda = f(c)$$

D'après Remarque $c \in I$ donc $\lambda \in f(I)$

$$\text{donc }]x, y[\subset f(I)$$

cas $e < d$ on pose $a = e$ $b = d$

$$x = f(b) \quad y = f(a)$$

de même on a $]x, y[\subset f(I)$

cas $d = e$ donc $x = y$ donc $]x, y[= \emptyset \subset f(I)$

Récapitulons: Supposons (2). Montrons (1)

Soient $a < b \in I$. Comme I intervalle $[a, b] \subset I$ donc f cont sur $[a, b]$

$$\text{Soit } x = \min f([a, b]) \quad y = \max f([a, b])$$

x et $y \in f([a, b])$ $x \leq y$ donc comme $f([a, b])$ est

un intervalle $]x, y[\subset f([a, b])$

Soit λ compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$

c-à-d $\lambda \in]x, y[$ donc $\lambda \in f([a, b])$

donc $\exists c \in [a, b]$ tq $\lambda = f(c)$.

comme $\lambda \neq f(a)$ $c \neq a$. Comme $\lambda \neq f(b)$ $c \neq b$.

donc $c \in]a, b[$.

Théorème (Weierstrass)

Soit $[a, b]$ un segment.

Soit f une application continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Alors $f|_{[a, b]}$ est bornée et atteint ses bornes

$\Leftrightarrow f|_{[a, b]}$ admet un maximum et un minimum

Corollaire Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ alors $f([a, b])$ est un segment. "L'image continue d'un segment est un segment."

Preuve d'après le thm des valeurs intermédiaires

$f([a, b])$ est un intervalle

d'après Weierstrass $f([a, b]) = [m, M]$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

def On dit que f admet un ^{minimum} maximum relatif (ou local) en a si il existe un intervalle ouvert I contenant a

tg $f(a)$ est un ^{min} maximum de f en I

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$$

(Fermat)
théorème Si f est dérivable en a et f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$

Preuve cas f admet un maximum local a

$$\forall x < a \quad 0 \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^-} f'_g(a) \geq 0$$

$$\forall x > a \quad 0 \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f'_d(a) \leq 0$$

Comme f dérivable en a $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a) = 0$

cas f admet un minimum local

Lemme de Rolle

(29)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$
 dérivable sur $]a, b[$

Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$

Preuve: $f([a, b]) = [m, M]$

si $m = M$ f est constante sur $[a, b]$ donc $\forall c \in]a, b[$
 $f'(c) = 0$

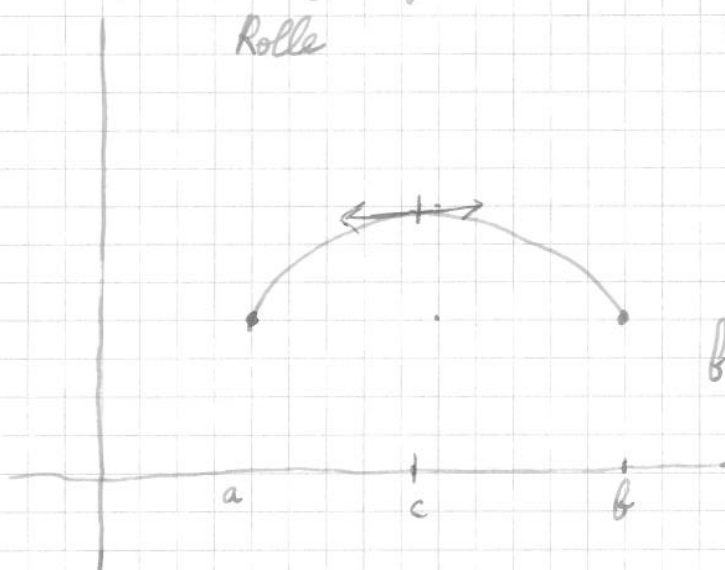
si $m < M$ alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = m$
 ou $f'(c) = M$ (car $f(a) = f(b)$ ne peut être égale
 à la fois à m et à M)
 donc f admet un extremum relatif en c
 donc d'après Fermat $f'(c) = 0$

Formule des Accroissements finis

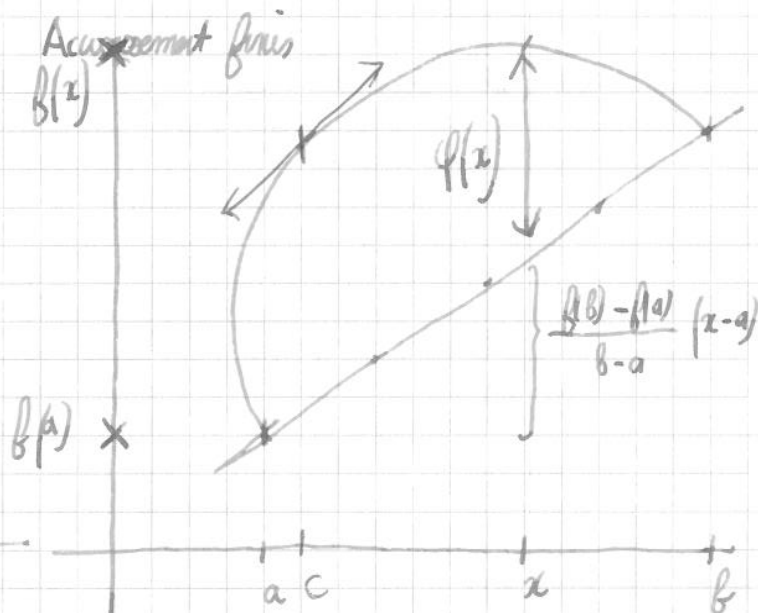
Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

Alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Interprétation graphique
 Rolle



Accroissement finis



preuve On applique Rolle à

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a)$$

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \quad \text{donc d'après Rolle}$$

$$\exists c \in]a, b[\quad \varphi'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Corollaire

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I

- a) f est croissante sur I ssi $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
- b) f est décroissante ≤ 0
- c) constante $= 0$

Preuve a) Supposons que f est croissante

$$\text{donc } \forall x, a \in I \quad x \neq a \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \geq 0$$

. Réciproque Supposons $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$.

Soit $a \leq b \in I$. Comme I intervalle, $[a, b] \subset I$

f dérivable sur I donc sur $[a, b]$

D'après les accroissements finis

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b-a) \geq 0 \quad \text{car } f'(c) \geq 0$$

b) On pose $g(x) = -f(x)$

$$f \text{ décroissante} \Leftrightarrow g \text{ croissante} \Leftrightarrow g' = -f' \geq 0$$

$$c) f \text{ constant} \Leftrightarrow f \text{ croissant et décroissant} \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0 \text{ et } \leq 0.$$

⚠ Si $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante

mais réciproque fautive

exemple $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3$$

strictement croissante de dérivée nulle en 0

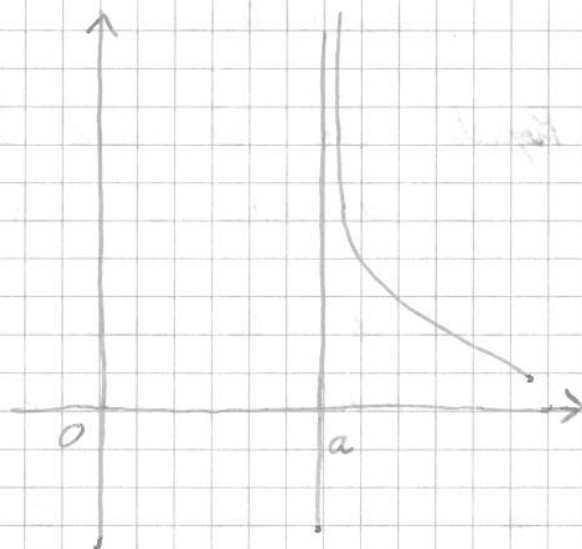
Asymptotes

asymptote verticale

def La droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe C représentant la fonction f

ssi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$



asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$

def Soient f et g deux applications de courbes représentatives C et C' .
On dit que C et C' sont asymptotes en $+\infty$ (ou en $-\infty$)

ssi $\lim_{x \rightarrow +\infty \text{ (ou } -\infty)} f(x) - g(x) = 0$

cas particuliers

— La droite D d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$

ssi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$

- La droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ (33)
 en $+\infty$ ou $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

def: Si $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite (finie ou infinie)
 on dit que la courbe $\mathcal{C}$ de f admet la droite
 de coefficient directeur $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ comme direction
 asymptotique

Propriété Si la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote
 à la courbe $\mathcal{C}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$
 c à d la courbe $\mathcal{C}$ de f admet la droite de coefficient
 directeur a comme direction asymptotique

def Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = +\infty$ ou $-\infty$

on dit que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique
 de direction la droite d'équation $y = ax$
 ou $f(x) = \sqrt{x}$

def Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que

la courbe de $\mathcal{C}$ de f admet une branche parabolique
 de direction $x = 0$

ou $f(x) = x^2$

Organigramme des branches infinies quand $f(x)$ tend vers l'infini à l'infini.

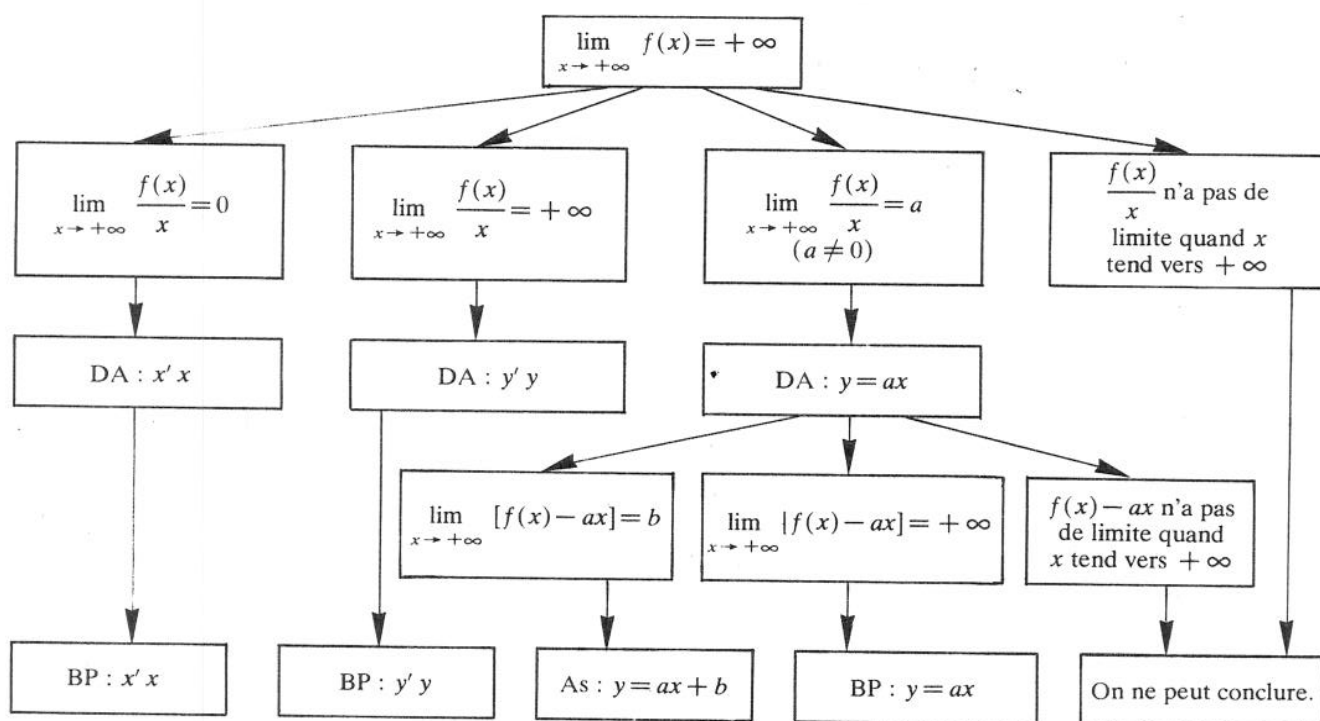
Dans le tableau ci-dessous, on désigne par :

« DA » une direction asymptotique

« BP » une branche parabolique

« As » une asymptote

Les résultats ci-dessous restent valables lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque les limites obtenues sont $-\infty$.



Conclusion : Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f dont la courbe représentative C par rapport à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ne peut pas se déduire par une transformation géométrique simple d'une courbe déjà connue, on peut adopter le plan suivant :

- 1) Recherche de l'ensemble de définition.
- 2) Recherche de propriétés permettant de réduire l'ensemble d'étude E .
- 3) Étude du **sens de variation** de la fonction f sur les intervalles inclus dans E , en utilisant si nécessaire sa dérivée lorsqu'elle existe. **Extremums** éventuels.
- 4) **Étude aux bornes** de l'ensemble E .
- 5) Résumé des résultats trouvés dans un **tableau de variation**.
- 6) Étude des **branches infinies**.
- 7) Construction de la **courbe représentative** en indiquant si cette courbe présente des propriétés particulières (symétries, tangentes ou demi-tangentes en des points particuliers...), et en précisant quelques valeurs.

