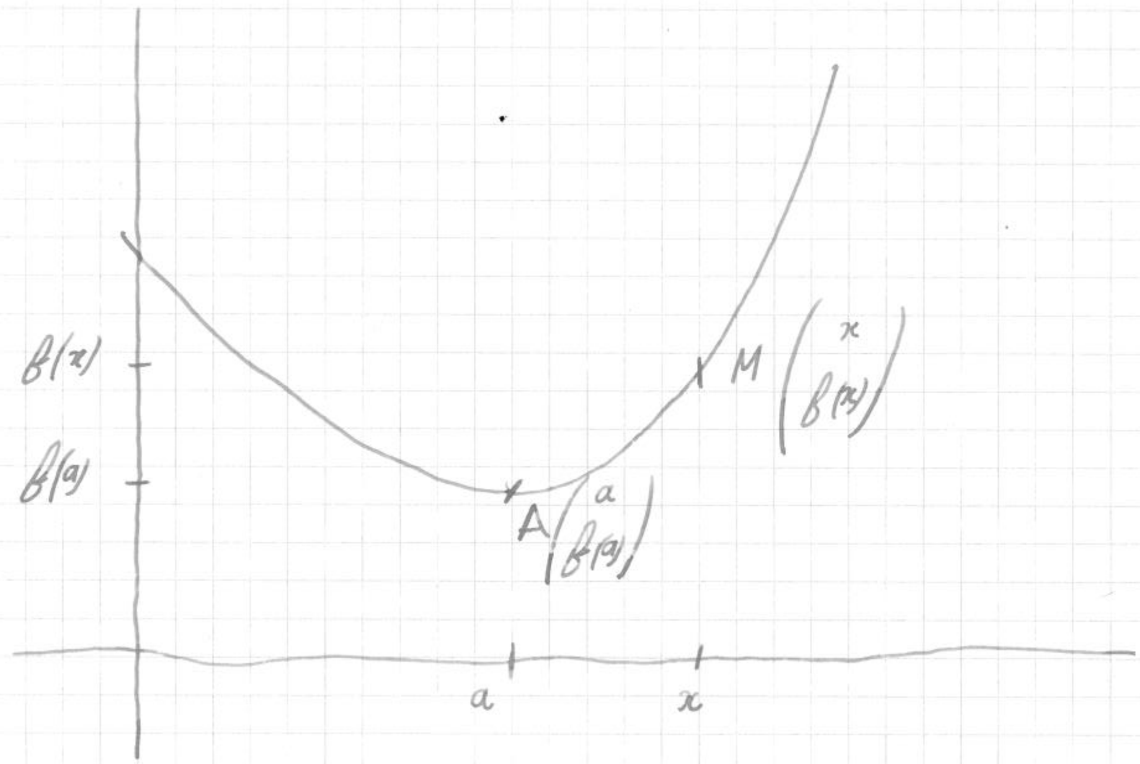
Dérivée

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Supposons que f est défini au moins sur un intervalle ouvert I contenant a



$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - a \\ f(x) - f(a) \end{pmatrix}$ pente de $AM = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ = taux de variation

def f est dérivable de dérivée $f'(a)$

si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, est fini et est égale à $f'(a)$

Dérivée

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction

def On dit que f admet un developpement limité d'ordre 1 en a

si f est defini (au moins) sur un intervalle ouvert I contenant a

et s'il existe un reel A et une fonction $\mathcal{E}$ defini sur I

tq $\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + A(x-a) + (x-a)\mathcal{E}(x)$

avec $\lim\limits_{x \to a} \mathcal{E}(x) = 0$

Proposition f est derivable en a si et seulement f admet un developpement limité d'ordre 1 en a

Dans ce cas $A = f'(a)$

Preuve à savoir

Corollaire Si f est derivable en a alors f est continue en a

Reciproque fausse

equation de la tangente en a

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Propriete Soient f et g deux fonctions derivables en a

alors • $f+g$ est derivable en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

• fg

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

- f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - g'(a)\,f(a)}{g(a)}$$

à condition que $g(a) \neq 0$

Dérivée d'une composée. Soient I et J deux intervalles ouverts

Soit $f : I \longrightarrow J$ une application dérivable en a

$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ en $f(a)$

alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a

et $(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g' f(a)$

Preuve $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\,\varepsilon_1(x)$

$\forall y \in J \quad g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))\,(y - f(a)) + (y - f(a))\,\varepsilon_2(y)$

donc

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g f(a) + g'(f(a))\,(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\,\varepsilon_2(f(x)) \\ &= g f(a) + g'(f(a))\, f'(a)\,(x-a) + g'(f(a))\,(x-a)\,\varepsilon_1(x) \\ &\quad + f'(a)(x-a)\,\varepsilon_2(f(x)) + (x-a)\,\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(f(x)) \\ &= g f(a) + g' f(a)\, f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x) = g'(f(a))\,\varepsilon_1(x) + f'(a)\,\varepsilon_2(f(x)) + \varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(f(x))$

$\lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0 \qquad \lim_{y \to f(a)} \varepsilon_2(y) = 0$

on a vu que f est continue en a

donc $\lim_{x \to a} \varepsilon_2(f(x)) = 0$.

donc $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

$$\frac{g\,f(x) - g\,f(a)}{x-a} = \frac{g\,f(x) - g\,f(a)}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\Big\downarrow \text{ quand } x \longrightarrow a.$$

$$g'\big(f(a)\big) \quad \times \; f'(a)$$

démo correcte si $\forall x \in I \;\; f(x) \neq f(a)$!

A la physicienne

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

Théorème dérivée d'une fonction réciproque

Soit I un intervalle ouvert.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I strictement monotone alors $f(I)$ est un intervalle ouvert et f admet une bijection réciproque f^{-1} continue sur $f(I)$ et strictement monotone
Soit $a \in I$, tq f est dérivable en a tq $f(a) \neq 0$
alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$

et $$f^{-1\,\prime}\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}$$

Preuve (admise)
Comment retrouver la formule : $f^{-1} \circ f(x) = x$
donc d'après la dérivée d'une composée

$$\big(f^{-1} \circ f\big)'(a) = f'(a)\; f^{-1\,\prime}\big(f(a)\big) = 1$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

on déduit que $(\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$(\ln |x|)' = 1/x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

<u>application dérivée</u>

Soit I un intervalle ouvert

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable pour tout $x \in I$.

on appelle dérivée de f, l'application noté $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f'(x)$ dérivée de f en x

<u>Dérivée successive</u>

$$f^{(0)} = f \qquad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

def f est $(n+1)$ fois dérivable en a

si f est n fois dérivable sur un intervalle ouvert

contenant a et $f^{(n)}$ est dérivable en a

$$f^{(n+1)}(a) = \left(f^{(n)}\right)'(a)$$

exemple $\quad (x^n)^{(p)} = \underbrace{n \times (n-1) \times \quad \times (n-p+1)}_{p \text{ termes}} \; x^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!} \, x^{n-p}$

Théorème Règle de L'Hôpital

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$

Soient f et g deux applications continues sur I

dérivable sur $I \setminus \{a\}$ tq

$\forall t \in I \setminus \{a\} \quad g'(t) \neq 0$

alors $\forall t \in I \setminus \{a\} \quad g(t) \neq g(a)$

et si $\lim\limits_{t \to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ existe finie ou infinie

alors $\lim\limits_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)}$ existe et est égale à $\lim\limits_{t \to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$

Preuve (admis) Réciproque fausse : il se peut que

$\lim\limits_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)}$ existe sans que $\lim\limits_{t \to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ existe

Application prolongement d'une dérivée

Soit f une application continue sur $[a, b[$

dérivable sur $]a, b[$

Si $\lim\limits_{t \to a^+} f'(t) = l \in \mathbb{R}$

alors f est dérivable à droite en a de dérivée $f'_d(a) = l$

preuve : on prend $I = [a, b[$ et $g(t) = t$ dans la règle de L'Hôpital.