

Injecteurs, surjecteurs, fonctions trigonométriques inverses

Soit $f: X \longrightarrow Y$ une application

def f est injective si tout élément de Y possède au plus 0 ou 1 antécédent par $f \iff \forall x, x' \in X \left(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \right)$

Ex injection canonique $g: A \longrightarrow X$

f est surjective

au moins un

$$\iff \forall y \in Y \exists x \in X \text{ tq } y = f(x) \iff f(X) = Y$$

def f bijectif

un seul antécédent

$$\iff \forall y \in Y \exists ! x \in X \text{ tq } y = f(x)$$

$$\iff f \text{ injective et surjective}$$

Ex id

La composée de 2 injections (resp. surjections, bijections) est une injection surjection (bijection)

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Ex 20 feuille 2

théorème et def f est bijectif ssi $\exists g: Y \longrightarrow X$ tq

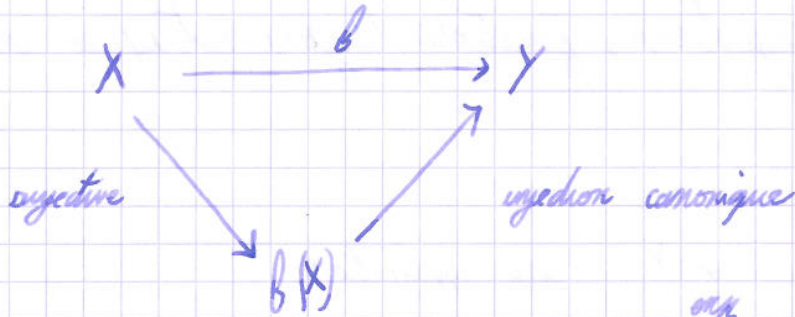
$$g \circ f = \text{id}_X \text{ et } f \circ g = \text{id}_Y$$

Si g existe alors g est unique. on l'appelle application réciproque de f on la note f^{-1}

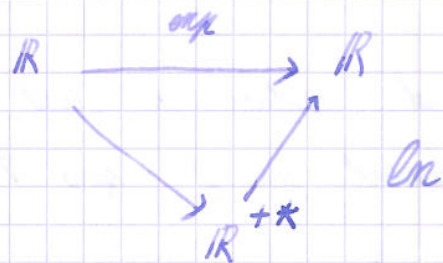
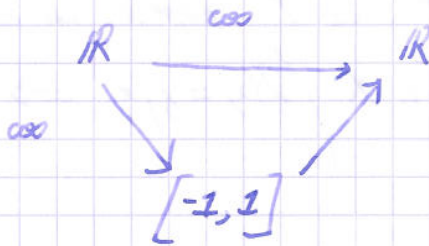
Preuve

Decomposition canonique d'une application

(12)



Exemple



$$\cos / [0, \pi] : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \text{ bijection}$$

$$\text{injection canonique } \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$y \mapsto x \in [0, \pi] \text{ tq } \cos x = y$$

arc cos

arctan

Limites

1 Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction application

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$
 $a \in D$ ou a la frontière de D

def f admet l comme limite en a si quelque soit le réel strictement positif ε aussi petit soit-il, il existe un réel strictement positif δ tel que pour tout $x \in D$

$$|x - a| < \delta \text{ entraîne } |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in D \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tq } f(D \cap]a - \delta, a + \delta[) \subset]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

f admet $+\infty$ comme limite en a si

$$\forall A > 0 \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in D \quad |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

f admet l comme limite en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \text{ tq } \forall x \in D \quad x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

f admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$ si

$$\forall B < 0 \exists A > 0 \text{ tq } \forall x \in D \quad x > A \Rightarrow f(x) < B$$

Unicité de la limite (admis)

Si f admet une limite finie ou infinie en a

alors cette limite est unique et on la note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Continuité en a

Si f admet l comme limite ^{finie} en a et $a \in D$ alors $l = f(a)$

on dit alors que f est continue en a

preuve: Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tq $\forall x \in D \left(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon \right)$ (14)

en prenant $x = a \in D$ comme $|a-a| = 0 < \delta$ on obtient $|f(a) - l| < \varepsilon$. Ceci est vrai quelque soit $\varepsilon > 0$

donc forcément $f(a) = l$.

Intuitivement

Si une application f admet la limite l au point a , cela signifie qu'on peut rendre $|f(x) - l|$ aussi petit que l'on veut, à condition que $|x - a|$ soit suffisamment petit ou encore qu'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de l , à condition que x soit suffisamment proche de a .

Généralisation Soit X une partie de $\mathbb{R}$

Soit $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application

Soit $f = g|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la restriction de g à D

$$x \longmapsto g(x)$$

def On dit que g admet l comme limite en a au sein de D quand x appartient à D

si f admet l comme limite en a

Notation $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D}} g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} g|_D(x)$

Exemple $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{x}{|x|}$

g n'admet pas de limite en 0 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ n'existe pas

Soit $f = g|_{\mathbb{R}^{+*}} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto g(x) = \frac{x}{|x|} = 1$

f admet 1 comme limite en 0, c.à.d g admet 1 comme limite en 0 au sein de $\mathbb{R}^{+*}$ (on dit aussi à droite)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}}} g(x) = 1 \quad \text{autrement} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

$$\text{def } \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in]a, +\infty[\cap X}} g(x) \quad \text{limite à droite}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in]-\infty, a[\cap X}} g(x) \quad \text{limite à gauche}$$

Remarque

Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application

cas $a \notin D$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

cas $a \in D$

$$f \text{ continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Opérations sur les limites

Soient $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$

deux applications.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe

alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$ existe et on a l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

sauf dans le cas $\begin{matrix} 0 & \times & \pm\infty \\ -\infty & + & (+\infty) \\ +\infty & + & (-\infty) \end{matrix}$ forme indéterminée

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{0^+} = +\infty$$

ou $\frac{+\infty}{+\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ indéterminés

Composition des limites

Soit $f: X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}$ deux applications
 $g: Y \longrightarrow \mathbb{R}$

Si $f(x)$ admet l comme limite quand x tends vers a
 et $g(x)$ l' l

alors $g \circ f(x)$ admet l' _____ a

Lemme Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application

Si f admet une limite finie en a alors il existe un intervalle ouvert $]a-\delta, a+\delta[$ tq f est bornée sur $D \cap]a-\delta, a+\delta[$.

Si f admet une limite infinie en a alors quelque soit l' intervalle ouvert $]a-\delta, a+\delta[$, f n'est pas bornée

sur $D \cap]a-\delta, a+\delta[$

Preuve:

Théorème. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in D \cup \text{frontière de } D$

Soient $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$.

deux applications tq $\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x)$

admettant des limites finies ou infinies en a

alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Preuve : • dans le cas $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$

et $l = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ est finie

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in D \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$

c.o.d. $\forall x \in D \cap]a - \delta, a + \delta[\quad \left. \begin{array}{l} l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \\ 0 \leq g(x) \end{array} \right\} 0 \leq l + \varepsilon$
non vide par hypothèse ou

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc $l \geq 0$ $\square$

• dans le cas $l = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ finie

et $l' = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ finie

alors $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) - f(x)) = l' - l$ } donc d'après le cas
 $\forall x \in D \quad g(x) - f(x) \geq 0$ } précédent $l' - l \geq 0$
donc $l' \geq l$. $\square$

Théorème des gendarmes

- Soient $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h: D \longrightarrow \mathbb{R}$
 3 applications telles que $\forall x \in D \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ existent
 et sont égales

alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égale à $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

- Soient $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$
 deux applications telles que $\forall x \in D \quad g(x) \leq f(x)$

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

Théorème

Soit $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante

Si f est majorée alors f admet une limite finie en b
 (à gauche) et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup \{ f(x) / x \in]a, b[\}$

Si f n'est pas majorée alors f admet $+\infty$ comme limite en b
 à gauche

Preuve Exo 40