

minimum, minimum, borne inférieure

I plus petit, plus grand élément

Soit A une partie de $\mathbb{R}$

def Un élément a de A est appelé le plus petit élément ou le minimum de A si $\forall x \in A \quad x \geq a$

Propriété : Toute partie A de $\mathbb{R}$ admet au plus un plus petit élément
c.à.d (0 ou 1)

Preuve Soient a et a' deux plus petits éléments de A
 a est un plus petit élément de A donc $\forall x \in A \quad x \geq a$
en particulier comme $a' \in A \quad a' \geq a$.

$a' \quad \text{-----} \quad a \quad \text{-----} \quad a' \quad \text{-----}$
 $\text{-----} \quad a \quad \text{-----} \quad a' \quad \text{-----}$
 $a \geq a'$

donc $a = a'$

un plus petit élément s'il existe est unique.

def Un élément a de A est appelé le plus grand élément de A ou le maximum de A

Propriété : Toute partie A de $\mathbb{R}$ admet au plus un plus grand élément

Exemple . $A = [0, 2[$ admet 0 comme plus petit élément et aucun plus grand élément

• $A = [0, 2]$ admet 0 comme plus petit élément et 2 comme plus grand élément

• $A = \mathbb{N}$ ou $[0, +\infty[$ admet 0 comme plus petit élément et aucun grand élément

II minorant, majorant

(2)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$

def Un élément $\overset{M}{m}$ de $\mathbb{R}$ est un ^{majorant} minorant de A si $\forall x \in A \quad x \leq \overset{M}{m}$. ^{majorée}

On dit que A est ^{majorée} minorée si A admet au moins un ^{majorant} minorant

Soit $\mathcal{M}(A)$ l'ensemble des majorants de A

Soit $\mathcal{m}(A)$ ————— mineurs de A

Exemple - $A = \mathbb{N}$ aucun majorant $\mathcal{M}(\mathbb{N}) = \emptyset$

Tous les reels negatifs sont des mineurs $\mathcal{m}(\mathbb{N}) = \mathbb{R}^-$
par exemple $0, -0,5, \dots$

- $A = [0, 2[$ ou $[0, 2]$

$\mathcal{m}(A) = \mathbb{R}^-$, $\mathcal{M}(A) = [2, +\infty[$

def On dit que A est bornée si A est à la fois majorée et minorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ et $\exists M \in \mathbb{R}$

$\forall x \in A \quad m \leq x \leq M$

Propriété A est bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A \quad |x| \leq M$.

III borne supérieure def sup A = plus petit élément (s'il existe) de $\mathcal{M}(A)$, plus petit des majorants

Si A n'est pas majorée alors A n'admet pas de borne supérieure

Ex (vide) $A = \emptyset \quad \mathcal{M}(\emptyset) = \mathbb{R}$ n'a pas de plus petit élément donc $\emptyset$ n'a pas de borne supérieure

th (admis)

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Borne inf = plus grand des mineurs $\inf A$

Propriété. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ bornée
alors $\inf A \leq \sup A$.

Preuve A partie non vide majorée donc $\sup A$ existe
minorée $\inf A$

$\sup A$ est un majorant donc $\forall x \in A$
 $\inf A$ ——— minorant $\inf A \leq x \leq \sup A$

$A \neq \emptyset$ donc $\exists x \in A$ donc $\inf A \leq \sup A$

• Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

Soit B une partie majorée de $\mathbb{R}$ tq $A \subset B$

alors $\sup A \leq \sup B$
caractérisation de la borne supérieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque

$$\boxed{M = \sup A} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} M \text{ majorant de } A \\ M \text{ plus petit des majorants que les } \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ majorant de } A \\ \forall M' \in \mathbb{R} \\ (M' \text{ majorant de } A \Rightarrow M \leq M') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A & x \leq M \\ \text{et } \forall M' \in \mathbb{R} & \left(\forall x \in A \ x \leq M' \Rightarrow M \leq M' \right) \end{cases} \quad P \Rightarrow Q$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in A \quad x \leq M$$

$$\forall M' \in \mathbb{R} \quad \left(M' < M \Rightarrow \exists x \in A \text{ tq } x > M' \right) \\ \text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{toute } M \text{ majorant de } A}$$

et tout ~~les~~ nombres réels strictement inférieurs à M
n'est pas un majorant de A

Rappel th (admis)

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

caractérise l'ensemble des entiers naturels.

Propriété

A possède un plus ~~petit~~ grand élément ssi $\sup A \in A$.

Dans ce cas, on a $\sup A =$ le plus grand élément de A

preuve. Supposons que A admette M comme plus grand élément

donc $\forall x \in A, x \leq M$ donc M est un majorant de A .

Soit M' un majorant de A donc $\forall x \in A, x \leq M'$

en particulier comme $M \in A, M \leq M'$ donc M plus petit des majorants donc $\sup A = M \in A$.

Réciproquement si $\sup A \in A$

Comme $\sup A$ majorant $\forall x \in A, x \leq \sup A$ } donc $\sup A$ plus petit des majorants

la notion d'application

pseudo - définition

Une application $f: X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto f(x)$

est un triplet (X, Y, f) où

X et Y sont deux ensembles et f une "règle" qui
à un élément x de X associe un unique élément $f(x)$ de Y .

On note par $\mathcal{F}(X, Y)$ ou Y^X l'ensemble des applications
de X à valeurs dans Y

L'ensemble des couples de la forme $(x, f(x))$ où $x \in X$
est le graphe de f

$$\text{graphe de } f = \left\{ (x, y) \in X \times Y \mid y = f(x) \right\} \subset X \times Y$$

Exemples 1) $X =$ ensemble des étudiants du groupe 4 $Y = \mathbb{N}$

$$f: X \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$x \longmapsto \text{age de } x$$

2) $X = \mathbb{N} \xrightarrow{\text{def}} \text{ suite à valeurs dans } Y$

$$3) \triangle f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$\text{et } g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longmapsto x^2$$

à priori sont deux applications différentes d'après la définition
en pratique, on les confond.

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application
 def B ensemble des valeurs de f ou ensemble image de f
 noté $f(X)$ ou $\text{Im } f$ est par définition

$$\{y \in Y \mid \exists x \in X \quad y = f(x)\}$$

(6)

Opérations sur les applications

Soient $f: X \rightarrow Y$

et $g: Y \rightarrow Z$

on appelle composé de g et de f notée $g \circ f$

l'application $g \circ f: X \rightarrow Z$

$$x \mapsto g \circ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x))$$

$\text{id}_X: X \rightarrow X$ application identité
 $x \mapsto x$

Propriété $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ associativité

$\text{id}_Y \circ f = f \circ \text{id}_X = f$ id. élément neutre

Soient $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

on appelle somme de f et de g

l'application $f + g: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$$

produit de f et de g

$f \cdot g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

produit de f par l'application constante égal à λ

est noté

λf

$$(\lambda f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f(x)$$

restriction

Soit $f: X \longrightarrow Y$ une application

A une partie de X

injection canonique $j: A \longrightarrow X$

$$a \longmapsto a$$

restriction de $f = f \circ j$ note $f|_A: A \longrightarrow Y$

$$a \longmapsto f(a)$$

Exemple

une application polynomiale réelle $a_n x^n + \dots + a_0$

se construit à partir de l'application

$$\text{id}_{\mathbb{R}} \text{ identité } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x$$

$$a_n (\text{id}_{\mathbb{R}})^n + \dots + a_1 \text{id}_{\mathbb{R}} + a_0$$

et des applications construites par produit d'application et somme d'application

Théorème fondamental de l'algèbre
ou théorème de D'Alembert

Tout polynôme complexe non constant $a_n z^n + \dots + a_0$
admet au moins une racine complexe α
on dit que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos

faux pour $\mathbb{R}$ $x^2 + 1$

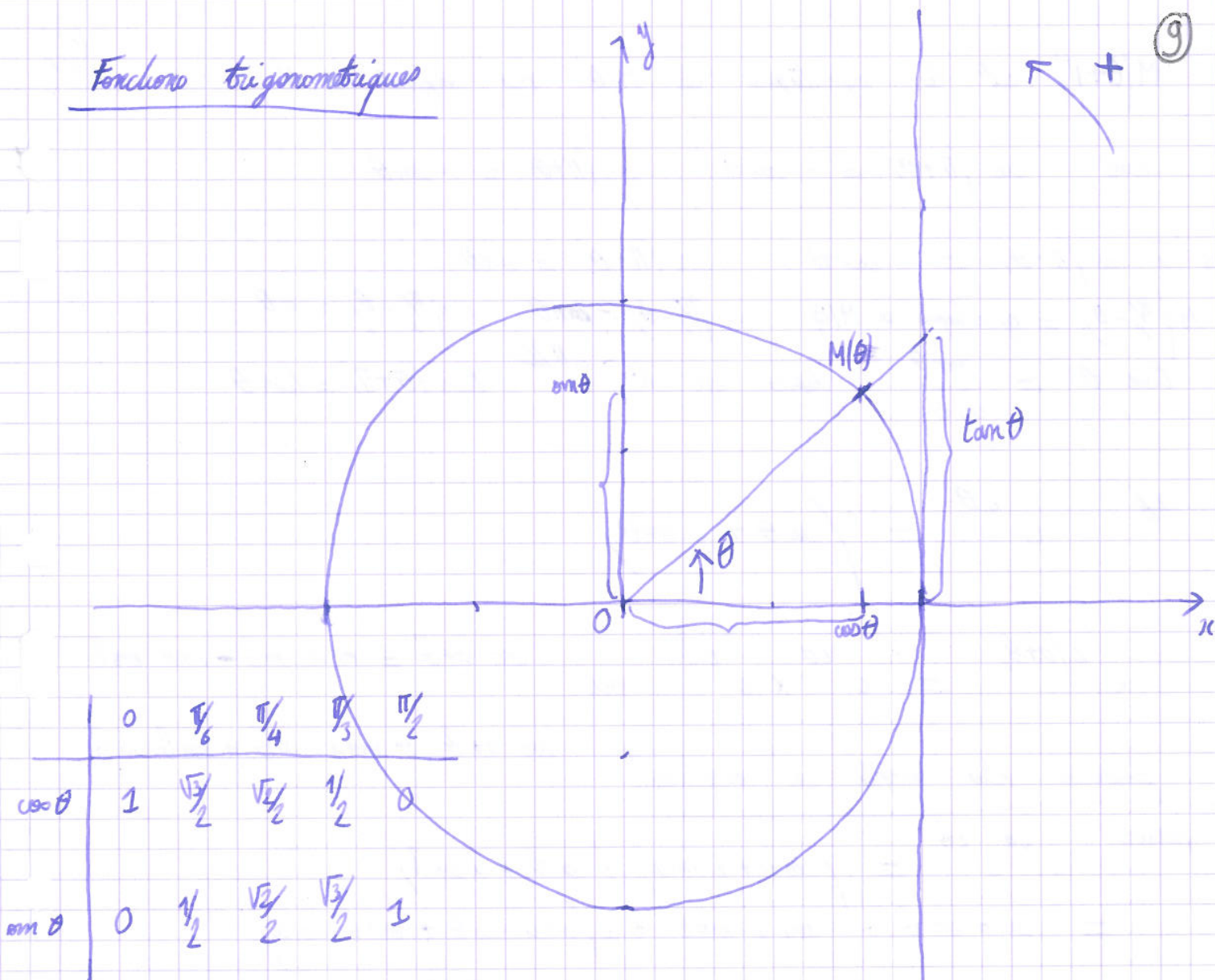
$$\text{donc } a_n z^n + \dots + a_0 = Q(z) (z - \alpha)$$

par récurrence

est le produit de polynômes du premier degré

Fonctions trigonométriques

9



$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du point $M(\theta)$

sur le cercle de rayon 1 et d'angle θ en radians

$$M(\theta + 2\pi) = M(\theta) \quad \text{donc} \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

$$M \in \text{cercle de rayon 1} \quad \text{donc} \quad OM^2 = 1 \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$M(-\theta)$ est la symétrique de $M(\theta)$ par rapport à l'axe des x

donc $\cos(-\theta) = \cos \theta$ cos paire

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ sin impaire

$M(\theta + \pi)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à θ

donc $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$

d'où $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$

$M(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = symétrique de $M(\theta)$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ défini sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$

def $e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$

$e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$ ou $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

formule plus simple en complexes!

preuve $e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a) (\cos b + i \sin b)$
 $= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ si $\begin{matrix} a, b \\ a+b \end{matrix} \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \cos a \sin a$

$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$(\tan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

donc $\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$ $\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$