Université d'Angers
Département de Mathématique

Fondements mathématiques – 2009-2010

Feuille d'exercices n° 4

fait en cours

Exercice 1.

1) Démontrer l'inégalité suivante : pour tout $x > 0$, sauf $\cancel{x - \frac{x^2}{2}} < \ln(x+1) < x$. Que se passe-t-il en 0 ?

2) Étudier les variations de la fonction $x \to \sqrt{x} - \ln x$. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln x < \sqrt{x}$. En déduire la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{e^x+1} + 3x + 4 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - ax + 2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Où est-elle dérivable ?

fait

Exercice 3.

1) Encadrer les racines réelles de l'équation $x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$.

2) Soit $F(x) = 3x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 60x - 72\ln|x| + 1$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer ~~à l'aide du théorème de Rolle~~ combien de racines réelles admet l'équation $f(x) = 0$, ainsi que des intervalles disjoints les contenant.

3) Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts. Montrer que l'équation

$$\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n} = 0$$

admet $n-1$ racines réelles distinctes. (Facultatif : ~~Même problème~~ pour $A_j \in \mathbb{R}$.)
que se passe t-il

fait

Exercice 4.

1) Dessiner les graphes des fonctions

$$x \mapsto \arcsin(\sin 2x), \quad x \mapsto \arcsin(\cos 2x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

en précisant chacune le nombre de points d'intersection du graphe avec l'abscisse.

2) Montrer que $\arcsin x \geq x$ pour tout $x \in [0,1]$ et que $\arctan x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

fait

Exercice 5.

1) Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$. Montrer que pour $x \geq e$ on a $\frac{\ln(x+1)}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{\ln x}{x}$.

2) Montrer que les fonctions $\arctan x$ et $\arctan \frac{x+2}{1-2x}$ différent par une constantes sur chacun des intervalles $]-\infty, 1/2[$ et $]1/2, +\infty[$.

Exercice 6.

1) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$. Montrer que si f est continue sur $[0,1]$ alors f admet un point fixe, c'est-à-dire, il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

fait

2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$. En utilisant le fonction $F(x) = (x-a)(x-b)\,e^{f(x)}$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{a+b-2c}{(c-a)(c-b)}.$$

Exercice 7. Soit $f : [1,e] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

fait

$$f(x) = \begin{cases} \ln 2 \cdot (x-1) & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \ln x & \text{si} \quad 2 \leq x \leq e. \end{cases}$$

Existe-t-il un $c \in]1,e[$ tel que $(e-1)f'(c) = f(e) - f(1)$?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = 2x + x^2 \sin(1/x)$. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0. Démontrer qu'on obtient une fonction dérivable en 0. Calculer sa dérivée en 0 et en $1/(n\pi)$. Déduire que f n'est croissante sur aucun intervalle ouvert contenant 0. Montrer que f est croissante sur $]-1/2, 1/2[$

Exercice 9.

1) Soit $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \arctan(1+x).$$

Montrer que f est constante.

2) En dérivant, calculer $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$.

3) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy \neq 1$, on a :

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'on peut avoir $k \neq 0$.

4) En utilisant le point précédent, calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

Exercice 10. Une femme sur une île veut aller sur le continent dans une ville au bord de la mer. (On considère le bord de mer rectiligne.) L'île est située à $1\,km$ du rivage. Le point sur le rivage le plus proche de l'île se trouve à $4\,km$ (en ligne droite) de la ville. Si la femme peut ramer à une vitesse de $2\,km/h$ et marcher à une vitesse de $4\,km/h$, où doit elle accoster sur le rivage pour que le temps nécessaire à son trajet soit le plus petit possible ?

Exercice 11. Un cube et une sphère sont fabriqués de telle manière que la somme de leurs surfaces soit 12. Quelles sont les valeurs possible qu'on peut obtenir pour la somme de leurs volumes ?

Exercice 12. Dans une sphère de rayon 1 on inscrit un cylindre. Quel est le volume maximal du cylindre ?