

## Fondements mathématiques – 2009-2010

### Feuille d'exercices n° 3

**Exercice 1.** Calculer la dérivée première.

(1)  $f(x) = 2x^3 - 7x + 2$

(2)  $g(t) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

(3)  $h(x) = \frac{6}{(3x^2 - 1)^4}$

(4)  $F(x) = (x^6 + 1)^5(3x + 2)^3$

(5)  $G(r) = (r^2 + r^{-2})^{-2}$

(6)  $H(t) = \sqrt{6t + 5}$

(7)  $p(x) = 6x^2 - \frac{5}{x} + 2\sqrt[3]{x^2}$

(8)  $q(x) = \sqrt{\frac{2x+5}{7x-9}}$

(9)  $r(\theta) = \sqrt{1 + 2\cos\theta}$

(10)  $P(t) = \sin \frac{1}{t} + \frac{1}{\tan t}$

(11)  $Q(x) = (1 + \sin 3x)^3$

(12)  $R(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

(13)  $u(x) = \arcsin 3x$

(14)  $v(x) = \arctan(2x^2 - 1)$

(15)  $w(x) = \arccos x^2 + \frac{1}{\arcsin x}$

(16)  $U(x) = \ln \left| \frac{2-9x}{1-x^2} \right|$

(17)  $V(t) = x^2 e^{-x^2}$

(18)  $W(t) = \ln(\cos x^2)$ .

**Exercice 2.**

1) Chercher les équations de la tangente et de la normale au graphique de  $f$  en  $P$  : 1)  $f(x) = 2x - \frac{4}{\sqrt{x}}$  avec  $P(4, 6)$  et 2)  $f(x) = 3x - \cos 2x$  avec  $x_P = \pi/4$ .

2) Si  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ , en quels points le graphique de  $f$  a-t-il une tangente horizontale ?

3) Déterminer les polynômes de degré  $\leq 2$  qui admettent la droite  $y = -x - 2$  comme droite tangente en 2. Combien de tels polynômes y a-t-il tels que  $P(-1) = 0$  ?

**Exercice 3.** De l'eau coule dans un récipient de forme conique avec un débit  $q$ . Le récipient a la forme d'un cône de base horizontale, sont sommet étant dirigé vers le bas. ; le rayon de la base du cône est  $a$ , la hauteur du cône  $b$ .

1) Trouver la vitesse à laquelle la surface de l'eau s'élève lorsque la profondeur de l'eau est  $y$ . On pourra commencer par répondre aux questions suivantes :

- Quelle est l'inconnue du problème ? Exprimer la en utilisant un taux de variation.
- Que représente  $q$  ?

2) Trouver la valeur numérique de l'inconnue en supposant  $a = 4$  dm,  $b = 3$  dm,  $q = 2$  dm<sup>2</sup>/min, et  $y = 1$  dm.

**Exercice 4.** Montrer que  $\frac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$  et que  $\frac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}$ .

**Exercice 5.** Calculer les limites suivantes des fonctions suivantes ( $a > 0$ ) :

(1)  $\frac{\ln x}{x^a}$  en  $+\infty$

(2)  $\frac{\cos 2x - 1}{x^3 + 5x^2}$  en 0

(3)  $\frac{e^x}{e^{e^x}}$  en  $\pm\infty$

(4)  $x \ln \frac{x+1}{x}$  en  $0^+$

(5)  $\frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x}{x^2}$  en 0

(6)  $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$  en 1

**Exercice 6.** Soit  $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ . Trouver les abscisses des points en lesquels la tangente au graphe de  $f$  est parallèle à la droite passant par  $A(-3, 2)$  et  $B(1, 14)$ . Calculer la valeur de  $f''$  en chaque racine de  $f' = 0$ .

**Exercice 7.** On suppose que  $f$  et  $g$  sont telles que  $f(2) = -1$ ,  $f'(2) = 4$ ,  $f''(2) = -2$ ,  $g(2) = -3$ ,  $g'(2) = 2$  et  $g''(2) = 1$ . Quelle est la valeur de l'expression suivante en  $x = 2$  :  $(2f - 3g)''$ ,  $(fg)'$ ,  $(fg)''$ ,  $(f/g)'$ ,  $(f/g)''$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ .