Exercice 24. Calculer l'aire de la région comprise entre les deux équations depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$: (1) $y = \sin 4x$ et $y = 1 + \cos \frac{x}{3}$; (2) $y = 4 + \cos 2x$ et $y = 3 \sin \frac{x}{2}$.

Exercice 25. La région comprise entre l'axe des y et les graphiques de $y = x^3$, $y = 1$ et $y = 8$ engendre, en tournant autour de l'axe des y, un solide de révolution dont on demande le volume.

Exercice 26. Dessiner la région R délimitée par les graphiques des équations et trouver le volume du solide engendré par la rotation de R autour de l'axe indiqué.

1) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$; axe des x.
2) $x = y^2$, $x - y = 2$; axe des y.
3) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$; axe des x. (Utiliser la formule de l'angle double.)
4) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 8$; axe des x.

Limites

fait

Exercice 27. Une simplification algébrique permet de calculer la limite, si elle existe.

$$(1)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \quad (2)\ \lim_{r\to -3} \frac{r^2+2r-3}{r^2+7r+12} \quad (3)\ \lim_{x\to 3} \frac{2x^3-6x^2+x-3}{x-3}.$$

fait

Exercice 28.

1) Calculer les limites $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)$, si elles existent : (1) $f(x) = \sqrt{5-2x} - x^2$, $a = 5/2$; (2) $f(x) = 1/x^3$, $a = 0$.

2) Écrire la définition pour la limite en $+\infty$, ou en $-\infty$.

3) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$.

Exercice 29. Calculer les limites suivantes :

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) \quad (2)\ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}} - 1\right) \quad (3)\ \lim_{x\to 5^+} (\sqrt{x^2-25}+3).$$

fait

Exercice 30. En utilisant la définition de la limite finie, déterminer si $\frac{1}{\sqrt{x}}$ admet une limite finie en 0. Calculer la limite en 0 de $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

Exercice 31. Donner un exemple d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de limite en 0 et telle que son carré en admette une.

Exercice 32. Démontrer que $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ n'est pas une fonction rationnelle. (*On suppose par l'absurde et on regarde f/x et on passe à la limite en $\pm\infty$.*)

fait

Exercice 33. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin m(x-1)}{x(x-1)} & x < 1 \\ 2mx^2 - 3x + 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel. Déterminer m tel que f ait une limite en $x_0 = 1$.

Exercice 34. À une lentille convexe est associée sa distance focale f en cm. Si l'on place un objet à une distance $p > f$ de la lentille, son image sera à distance q, de l'autre coté, liée à p et f par l'équation de la lentille : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$. Étudier $\lim_{p\to f^+} q$. Que devient l'image lorsque $p \to f^+$?

Exercice 35. En accord avec la théorie de la relativité, la longueur d'un objet dépend de sa vitesse v. Einstein a montré aussi que la masse m d'un objet est liée à sa vitesse par la formule $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, où m_0 est la masse de l'objet au repos et c la vitesse de la lumière. Étudier $\lim\limits_{v\to c^-} m$. Pourquoi est-il nécessaire de prendre une limite à gauche ?

fait

Exercice 36. Calculer la limite si elle existe.

$$(1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+1}{2x^2+4x-7} \quad (2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x+1}{6x^3+2x^2-7} \quad (3)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{4x^3+3} \quad (4)\ \lim_{x\to\infty} \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

fait

Exercice 37. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x+\cos x} = 0.$$

Exercice 38. Chercher les asymptotes verticales et horizontales des courbes $y = f(x)$: (1) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$, (2) $f(x) = \frac{x^2-x}{16-x^2}$.

Exercice 39. Esquisser un graphique possible d'une fonction f qui satisfait les conditions données, en excluant que la courbe traverse l'une des asymptotes.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$,. $\lim\limits_{x\to -1^\pm} f(x) = \pm\infty$.

fait

Exercice 40. On veut démontrer l'affirmation suivante : *Si $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim_{x\to b} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in]a,b[\}$.* On note par $l = \sup\{f(x) \mid x \in]a,b[\}$ et on considère $\varepsilon > 0$.

1) Écrire la caractérisation de l en utilisant ε.

2) Déduire l'existence d'un $x_\varepsilon \in]a,b[$ tel que $f(x) > l-\varepsilon$ pour tout $x \in]x_\varepsilon, b[$.

3) Conclure en produisant une valeur pour $\delta(\varepsilon) > 0$ apparaissant dans la définition de la limite de f en b.

Exercice 41. On suppose connu que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Montrer que sa limite en $+\infty$ est 0.

fait

Exercice 42. On verse de l'eau salée, concentrée à 10 g/l, dans une cuve qui contient 200 l d'eau pure.

1) Si l'eau salée s'écoule à la vitesse de 20 l/min dans la cuve, quel est le volume d'eau ainsi que la quantité de sel après t minutes ?

2) Quelle est la concentration de sel $c(t)$ en g/l après t minutes ? Que devient $c(t)$ après une longue période de temps ?