

Fondements mathématiques – 2009-2010

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Si a et h sont deux nombres réels, calculer et simplifier $f(a)$, $f(-a)$, $f(a) + f(h)$ et $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$.

Exercice 2. On considère la correspondance $t \mapsto f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$.

- 1) Définir une fonction en utilisant cette correspondance.
- 2) Si le domaine de f est $\mathbb{R}$, qui est l'ensemble $\text{image } f(\mathbb{R})$? (Si $f(t) = (x(t), y(t))$, calculer $x^2 + y^2$.)

Exercice 3. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

- (1) $x \mapsto \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$, (2) $x \mapsto 1/\sqrt{|x|+x}$, (3) $f, g, f+g, g \circ f$ et $f \circ g$, où $f(x) = \sqrt{3-2x}$ et $g(x) = \sqrt{x+4}$.

Exercice 4. Pour $f(x) = \sqrt{x^3+1} - 1$, calculer $f(0,00001)$. Si votre résultat est 0, essayer la forme équivalente $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+1}$.

Exercice 5. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 - 2(2m-1)x + 3m$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminer m tel que

- 1) L'image de f soit contenue dans $[-2, +\infty[$.
- 2) L'image de f soit contenue dans $]-\infty, 1]$.

Exercice 6. Soit R un rectangle d'aire 4. Déterminer ses côtés tels que son périmètre soit le plus petit possible.

Exercice 7. Les premières embarcations du programme Apollo avaient la forme d'un tronc de cône circulaire droit, le solide qu'on obtient en coupant la partie supérieure d'un cône droit par un plan parallèle à sa base. Pour le tronc de cône les rayons a et $b > a$ sont fixés.

- 1) Exprimer y (la hauteur de la partie supérieure enlevée) en fonction de h (la hauteur du tronc de cône) par les relations entre triangles semblables.
- 2) Exprimer le volume du tronc de cône en fonction de h .
- 3) Si $a = 2m$ et $b = 1m$, pour quelle valeur de h le volume sera-t-il de $17m^3$?

Exercice 8. Dessiner le graphique de la fonction ci-après :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Sur la même figure dessiner le graphique de la fonction définie par $g(x) = f(x-1)$ (un déplacement horizontal du graphique de f).

Exercice 9. Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Déterminer le plus grand sous intervalle fermé sur lequel la fonction f définie par $f(x) = x^2 - mx + 1$ est strictement décroissante.

Exercice 10. Déterminer, parmi les triangles ayant un côté de 4 et un côté de 3 cm, celui d'aire maximale ?

Exercice 11. De quelle longueur est l'arc intercepté par l'angle au centre θ sur un cercle de diamètre d si (1) $\theta = 50^\circ$, $d = 16$, ou (2) $\theta = 2$, $d = 120$?

fait { **Exercice 12.** Montrer que la mesure en radians de l'angle est égale au double de l'aire du secteur du cercle unité découpée par l'angle.

Exercice 13. Calculer les valeurs des fonctions trigonométriques de θ si

- 1) $0 < \theta < \pi/2$ et $\tan \theta = 5/12$;
- 2) $\theta = \angle AOB$ avec $A(1,0)$ et B dans le troisième quadrant, (OB) étant parallèle à la droite d'équation $2y - 7x + 2 = 0$.

fait { **Exercice 14.** Effectuer la substitution trigonométrique indiquée en vue d'obtenir, après simplification et grâce aux identités fondamentales, une expression qui ne contienne plus de radical.

- 1) $\sqrt{16 - x^2}$; $x = 4 \sin \theta$ pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.
- 2) $\frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$; $x = 3 \sin \theta$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.
- 3) $\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2}$; $x = 2 \tan \theta$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

fait { **Exercice 15.**

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\sin x - 1/2}$.
- 2) Vérifier les identités $(1 - \sin^2 t)(1 + \tan^2 t) = 1$ et $2 \sin^2 2t + \cos 4t = 1$.
- 3) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.
- 4) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\tan(2x)$ en fonction de $\tan x$.

fait { **Exercice 16.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) $2 \cos t - \sqrt{3} = 0$; (2) $2 \sin 3t + \sqrt{2} = 0$; (3) $\sin(2x) = -\sqrt{3}/2$; (4) $\cos t + \cos 2t = 0$; (5) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$. (On pourra remplacer $\sqrt{3}$ par $\tan \alpha$, où α est une solution particulière de $\tan \alpha = \sqrt{3}$.)

Exercice 17. Calculer approximativement la solution de l'équation $x = \frac{1}{2} \cos x$ en suivant la procédure ci-dessus :

- 1) Dessiner $y = x$ et $y = \frac{1}{2} \cos x$ dans le même système d'axes.
- 2) Ce dessin permet de déterminer une première approximation x_1 ; laquelle ?
- 3) Calculer ensuite d'autres approximations $x_2, x_3, \dots$ par la formule $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cos x_n$, jusqu'à obtenir 6 décimales exactes.

fait { **Exercice 18.** Montrer que $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/(1 - x^2)$ est bijective. Exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Trouver une fonction polynomiale de degré au plus 1 qui réalise une bijection entre les intervalles $]a, b[$ et $]c, d[$, où $a < b$ et $c < d$ sont des nombres réels.

fait { **Exercice 20.** $g \circ f$ ~~injective (surjective)~~
 $= id$ implique f injective (g surjective).

fait { **Exercice 21.**

- 1) Résoudre dans $[2\pi, +\infty[$, $\sin(x + 1) = -1/3$.
- 2) Trouver une expression algébrique en x de $\cos(\arcsin x)$ pour $x \in [-1, 1]$.
- 3) Calculer $\sin(\arcsin 1/2 + \arccos 0)$, $\cos(\arctan(-3/4) - \arcsin 4/5)$ et $\tan(\arctan 4/3 + \arccos 8/17)$.

Exercice 22. Déterminer le domaine de définition de $x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2 + 2x - 8})$.

Exercice 23. Dessiner la figure délimitée par les graphiques des équations et calculer son aire. (1) $y = x^2$ et $y = 4x$, (2) $y = 4 - x^2$ et $y = -4$, (3) $y^2 = 4 + x$ et $y^2 + x = 2$, (4) $y = x^{2/3}$ et $x = y^2$.