Fondements mathématiques – 2009-2010

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1.

fait

1) Dessiner la droite qui passe par les deux points $A(-1,4)$ et $B(3,2)$ et calculer sa pente.

2) Dessiner les droites et chercher les coordonnées de leur point d'intersection : $2x+3y=2$ et $x-2y=8$.

3) Trouver une équation de la médiatrice de $[AB]$; $A(3,-1)$, $B(-2,6)$ et $A(4,2)$, $B(-2,10)$.

4) Trouver une équation du cercle qui est tangent aux deux axes, a le centre dans le deuxième quadrant et est de rayon 4.

Exercice 2. Résoudre :

fait

(1) $x^2 = 3x-4$, (2) $x^3+3x^2-10x=0$, (3) $2x^2+5x-6m=0, (m \in \mathbb{R})$,

$$(4)\ \begin{cases} tz+t &= 15z \\ t+z &= 12 \end{cases} \quad (5)\ \begin{cases} xz+y &= 7z \\ yz+x &= 8z \\ x+y+z &= 12 \end{cases} \quad (6)\ x^2+5y^2=4xy.$$

(Dans le deuxième système on peut faire apparaître l'expression $t=x+y$ et utiliser le résultat du premier.)

Exercice 3. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :
1) $\max(x,y) = (x+y+|x-y|)/2$;
2) $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

Exercice 4. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité de Bernoulli : pour tout $x > -1$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Exercice 5. Résoudre :

fait

$$(1)\ -5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1, \quad (2)\ x^2-10 > 3x, \quad (3)\ \frac{x+1}{2x-3} > 2, \quad (4)\ \frac{2}{2x+3} \leq \frac{2}{x-5},$$

$$(5)\ \sqrt{3-x} > 1/2, \quad (6)\ \sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > 1/2, \quad (7)\ \sqrt[3]{3-x} > 1/2$$

$$(8)\ \mid x^2-4x+3 \mid = 2x+3, \quad (9)\ \mid x^2-x-2 \mid \leq x-1.$$

Exercice 6.

1) Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$. Traduire à l'aide des quantificateurs $\forall$ – *quelque soit* ou *pour tout* – et $\exists$ – *il existe* – les propositions suivantes : 5 est un majorant de A ; m est un minorant de A ; P n'est pas un majorant de A ; A est majoré ; A est minoré ; A est borné ; A n'est pas minoré.

2) Donner un sous ensemble de $\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes : ne possède pas de borne supérieure ; possède une borne inférieure mais pas de minimum ; possède un minimum.

Exercice 7. Soient A et B deux sous-ensembles réels majorés. On note par $A + B$ le sous-ensemble

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

fait

Exercice 8. Pour chacun des sous ensembles E de nombres réels suivants,

$$(1)\ \left\{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \qquad (2)\ \{a + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad (3)\ \left\{a + \tfrac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$(4)\ \left\{\tfrac{2+(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad (5)\ \left\{\tfrac{1}{x+2} \mid x \in]0, +\infty[\right\} \quad (6)\ \{x^2 \sin x \mid x \in]0, +\infty[\}.$$

donner (si ils existent) des minorants et des majorants, la borne inférieure et la borne supérieure, le minimum et le maximum.

Exercice 9.

1) Soient $a, q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a + a \cdot q + \cdots + a \cdot q^n = a(1 - q^{n+1})/(1 - q)$.

2) Soit $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$. Calculer S_n en étudiant la différence $S_n - 2S_{n-1}$.

3) Déterminer les bornes supérieure et inf érieure de l'ensemble

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Exercice 10. Soit a un réel vérifiant pour tout réel b strictement positif $a \leq b$. Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $a \leq 0$.

Exercice 11. La vitesse à laquelle un comprimé de vitamine C se dissout dépend de son aire. Une marque présente des comprimés de 2 cm de long et de forme cylindrique terminée à chaque bout par un hémisphère de $0,5$ cm de diamètre. Une seconde marque fabrique des comprimés qui ont la forme d'un cylindre circulaire droit de $0,5$ cm de hauteur.

1) Quel diamètre doit avoir le comprimé en forme de pastille pour que son aire soit égale à celle du premier comprimé ?

2) Calculer le volume de chaque comprimé.

fait

Exercice 12. Représenter les courbes $y = x^2 - 2x - 3$ et $y = \frac{1}{2}\,2 + \frac{1}{2}$ et résoudre graphiquement le système d'inéquations $y < x^2 - 2x - 3$, $y > \frac{1}{2}\,2 + \frac{1}{2}$.