

Anthony
Prodhomme
L1 MPCIE
groupe 4a

Feuille d'exercices n°1

Exercice n°2:

(+)

$$\begin{cases} t \cdot z + t = 15z & L_1 \\ t + z = 12 & L_2 \end{cases}$$

$$L_2: t + z = 12$$

$$L_2: z = 12 - t$$

On remplace
z par 12-t

$$(12 - t)t + t = 15(12 - t)$$

$$12t - t^2 + t = 180 - 15t$$

$$t^2 - 28t + 180 = 0$$

$$\text{ou } \begin{cases} t = 18 \\ t = 10 \end{cases}$$

$$\text{si } \left(t = 18, \text{ et } z = -6 \right) \text{ ou } \left(t = 10, \text{ et } z = 2 \right) \} \text{ solutions possibles}$$

Exo 2 (5)

$$\begin{cases} xz + y = 7z & L_1 \\ yz + x = 8z & L_2 \\ x + y + z = 12 & L_3 \end{cases}$$

Posez $t = x + y$

along $L_3 \Rightarrow t + z = 12$
On remplace z par $12 - t$
 $z = 12 - t$

$$xz + y = 7z \quad (L_1)$$

$$x(12 - t) + y = 7(12 - t) \quad (L_1)$$

$$12x - xt + y = 84 - 7t \quad (L_1)$$

$L_1 + L_2$ donne $ty + t = 15z$ donc d'après (4) $z = 2$ ou -6
1^{er} cas si $t = 18$; $z = -6$

si $z = -6$:

$$xz + y = 7z \quad (L_1)$$

$$-6x + y = -42 \quad (L_1)$$

$$y = 6x - 42 \quad (L_1)$$

$$yz + x = 8z \quad (L_2)$$

$$(6x - 42)(-6) + x = 8(-6) \quad (L_2)$$

$$-36x + 252 + x = -48 \quad (L_2)$$

$$-35x = -300$$

$$x = \frac{60}{7} \quad /$$

$$\frac{60}{7} + y - 6 = 12 \quad (L_3)$$

$$y = 12 + 6 - \frac{60}{7} \quad (L_3)$$

$$y = \frac{66}{7}$$

$$\underline{x = \frac{60}{7} ; y = \frac{66}{7} ; z = -6}$$

2^{ème} cas

$$\underline{\text{si } z = 2}$$

on a $x + y + z = 8z \quad (L_1)$

$$2x + x = 16 \quad (L_2)$$

$$2x = x + 16 \quad (L_2)$$

$$x = -\frac{1}{2}x + 8$$

$$2x - \frac{1}{2}x + 8 = 7 \times 2 = 14 \quad (L_1) \text{ (on remplace } y \text{ par son expression)}$$

$$\frac{3}{2}x + 8 = 14 \quad (L_1)$$

$$\frac{3}{2}x = 6 \quad (L_1)$$

$$x = 4$$

$$x + y + z = 12 \quad (L_3)$$

$$4 + y + 2 = 12 \quad (L_3)$$

$$y = 6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{array} \right\} \text{ solutions pour } z = 2 \quad /$$

Feuille d'exercices

n° 1

Exercice 3:

$$1) \max(x, y) = (x + y + |x - y|) / 2$$

$$\bullet \text{ si } x \geq y ; \max(x, y) = x \text{ et } |x - y| = x - y$$

$$\begin{aligned} & x (x + y + x - y) / 2 = 2x \div 2 \\ & = x \end{aligned}$$

donc pour $x \geq y$, la relation est vérifiée.

$$\bullet \text{ si } y \geq x , \max(x, y) = y \text{ et } |x - y| = y - x$$

$$\begin{aligned} & x (x + y + |x - y|) / 2 = (x + y + y - x) / 2 \\ & = \frac{2y}{2} = y \end{aligned}$$

Donc pour $y \geq x$, la relation est vérifiée.

Exercice 4:

Initialisation: Pour $x = 0$, on a

$$(1+x)^0 = 1$$

$$\text{et } 1 + 0 \times x = 1$$

donc pour $x = 0$, la propriété $(1+x)^n \geq 1 + nx$ est vraie.

Supposons pour $\forall k \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$\text{On a: } (1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k$$

$$\text{or } x > -1 \text{ donc } 1+x > 0$$

$$(1+x)^k \geq 1 + kx$$

$$(1+x)(1+x)^k \geq (1+kx)(1+x) \quad \text{car } 1+x > 0$$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + x + kx + kx^2$$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + kx^2$$

$$\text{donc } (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x \quad \text{car } kx^2 \geq 0$$

La propriété est héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 6:

1) $\forall x \in A, x \leq 5$ ✓

~~$\forall x \in A$~~ $\exists m \in \mathbb{R}, m \leq x$ ✓

~~$\exists x \in A$~~ $\exists p \in \mathbb{R}$ $\text{Eq } p \leq x$ ✓

~~$\forall x \in A$~~ $\exists M \in \mathbb{R}$ $\text{Eq } \forall x \in A, x \leq M$ ✓

L'ordre des quantifications $\exists$ et $\forall$ est important!

$\forall x \in A$ $\exists m \in \mathbb{R}$ $\text{Eq } m \leq x$ ✓

$\exists m \in \mathbb{R}$ $\exists M \in \mathbb{R}$ $\text{Eq } m \leq x \leq M$ ✓

$\forall x \in A$ $\forall m \in \mathbb{R} \exists x \in A, x \leq m$ ✓

- 2) ne possède pas de borne supérieure: $[0; +\infty[$ ✓
possède une borne inférieure mais pas de $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ✓
possède un minimum: $[2; 4]$ ✓