Université d'Angers — **2006-7**
Licence de Mathématiques-L3 — **U2-Intégration**

Examen du Vendredi 2 Mars 2007.

EXERCICE 1 (2 **points) : Une application mesurable.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{Si } x \geq 0, \\ -x & \text{Si } x < 0. \end{cases}$$

i) Montrer que f est mesurable.

EXERCICE 2 (5 **points) : Intégration sur une partie.** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure positive μ. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable à valeurs positives. Soit $E \in \mathcal{A}$, on pose

$$\varphi(E) := \int_E f \, d\mu := \int_X f\chi_E \, d\mu.$$

Ici χ_E désigne l'application caractéristique de la partie E.

i) Montrer que φ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$, en utilisant le théorème de convergence monotone ou de Beppo LEVI.

EXERCICE 3 (5 **points) : Théorème de commutation des signes $\int_X$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ pour des applications à termes complexes.** Soit μ une mesure positive sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Soit $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$, l'ensemble des applications mesurables et intégrables de X à valeurs dans $\mathbb{C}$. On rappelle que par définition, pour tout $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$,

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{C}$ une suite d'applications intégrables telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$ et telle que $\forall x \in X$, la série complexe $\sum f_n(x)$ converge. Pour tout $x \in X$, soit $S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sa somme.

i) Montrer que $S \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$.

ii) Montrer que la série complexe $\sum(\int_X f_n \, d\mu)$ converge et a pour somme $\int_X S \, d\mu$.

Indication pour i) et ii) : On appliquera le théorème de convergence monotone (ou de Beppo LEVI) puis le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

EXERCICE 4 (8 **points) : Intégrales dépendant d'un paramètre.**

On rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!}$. On démontre facilement et on admettra que pour tout entier $n \geq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{2n} \exp(-t^2) dt$ converge et est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$.

En utilisant l'exercice 3, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

i) la fonction $t \mapsto \exp(-t^2)\operatorname{ch}(xt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

ii) et que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\operatorname{ch}(xt) dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(x^2/4)$.

Ajout : On peut aussi appliquer le théorème de convergence monotone (ou de Beppo LEVI)