Université d'Angers **2006-7**
Licence de Mathématiques-L3 **U2-Intégration**

Examen du 12/01/2007.

EXERCICE 1 : Caractérisation des applications mesurables réelles. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application. On rappelle que tout ouvert O de $\mathbb{R}$ est reunion dénombrable d'intervalles ouverts de la forme $]a, b[$, c'est à dire O s'écrit sous la forme $O = \cup_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$.

i) Montrer que f est mesurable si et seulement si pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(]-\infty, b[) \in \mathcal{A}$.

EXERCICE 2 : Applications intégrables de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ et séries convergentes. On considère l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ muni de la σ-algèbre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit δ la mesure positive sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie pour tout $E \subset \mathbb{N}$, par
$\delta(E) :=$ cardinal de E si E est fini, $\delta(E) := +\infty$ si E est infini.
(La mesure δ s'appelle la mesure de dénombrement.) On note $\ell^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \delta, \mathbb{R})$. Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une application.

i) Montrer que u est mesurable.

ii) En appliquant le théorème de convergence monotone à la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications définies par

$$(s_n)(i) = \begin{cases} |u(i)| & \text{Si } i \leq n, \\ 0 & \text{Si } i > n, \end{cases}$$

montrer que

$$\int_{\mathbb{N}} |u| \, d\delta = \sum_{n=0}^{+\infty} |u(n)|.$$

iii) Montrer que, si $u \in \ell^1$ alors $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} u \, d\delta = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)$.

EXERCICE 3 : Théorème de commutation des signes $\int_X$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ pour des applications à termes complexes. Soit μ une mesure positive sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{C}$ une suite d'applications intégrables telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$ et telle que $\forall x \in X$, la série complexe $\sum f_n(x)$ converge. Pour tout $x \in X$, soit $S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sa somme.

i) Montrer que $S \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$.

ii) Montrer que la série complexe $\sum(\int_X f_n \, d\mu)$ converge et a pour somme $\int_X S \, d\mu$.

Indication pour i) et ii) : On appliquera le théorème de convergence monotone (ou de Beppo LEVI) puis le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

EXERCICE 4 : Inégalité de Hölder. Soit $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu, \mathbb{C})$. On rappelle que $\|g\|_\infty$ est le plus petit des majorants essentiels de $|g|$ et qu'un majorant essentiel est un majorant presque partout.

i) Montrer que $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.