Université d'Angers L3

U2 — Série d'exercices n°5. INTEGRATION. 2007-2008

Exercice 1 : Fonctions intégrables et intégrales convergentes. Les résultats de cet exercice sont à connaitre. Cet exercice utilise l'exercice analogue pour les fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et les intégrales de Riemann non généralisées.

i) Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. Montrer que l'intégrale (de Riemann généralisée) $\int_a^b f(t)\, dt$ est absolument convergente (ce qui veut dire ?) ssi $f \in \mathcal{L}^1([a, b[, \mu, \mathbb{C})$. Montrer que dans ce cas, l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b[} f\, d\mu$ est égale à l'intégrale de Riemann généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$.

ii) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que l'intégrale (de Riemann généralisée) $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est absolument convergente ssi $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, \mu, \mathbb{C})$. Montrer que, dans ce cas, l'intégrale de Lebesgue $\int_{[0,+\infty[} f\, d\mu$ est égale à l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

iii) Soit f la fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

Démontrer que l'intégrale (de Riemann généralisée) $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente et que la fonction f n'est pas dans $\mathcal{L}^1([0, +\infty[, \mu, \mathbb{C})$.

Exercice 2. Soit n un nombre entier, $n > 0$, on considère les fonctions f_n et g_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^4 + x^4} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^4}\,.$$

i) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ et $g_n(x)$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.

ii) On désigne par μ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n\, d\mu\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,+\infty[} f_n\, d\mu\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} g_n\, d\mu\,.$$

iii) Démontrer que la suite $(f_n)_{n>0}$ est dominée sur $[0, 1]$ par une fonction φ_0 intégrable sur $[0, 1]$ (à trouver) et dominée sur $[1, +\infty[$ par une fonction φ_1 intégrable sur $[1, +\infty[$ (à trouver). Pour chercher φ_1, on pourra comparer $f_n(x)$ et $1/x^2$.

iv) Démontrer que la suite $(g_n)_{n>0}$ n'est pas dominée sur $[0, +\infty[$ par une fonction γ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 : Le produit de convolution. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et tendant vers 0 à l'infini (*i.e.* $f(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$), et g une fonction intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue μ) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, *i.e.* $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{R})$, on définit la fonction $f * g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la formule suivante :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t) g(t)\, dt.$$

Démontrer que la fonction $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Intégrales dépendant d'un paramètre. On rappelle que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}/2$.

i) Calculer, pour tout entier $n \geq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{2n} \exp(-t^2)dt$. En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto \exp(-t^2)\cos(zt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\cos(zt)dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-z^2/4)$.

ii) Établir la relation suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\exp x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Peut-on dériver les deux termes de cette égalité ?

Exercice 5 : La bosse glissante. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables et intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

i) On suppose que la suite converge uniformément sur $[a, b]$ vers f. Montrer que f est mesurable et intégrable sur $[a, b]$. Montrer que $\int_{[a,b]} f_n \, d\mu$ tend vers $\int_{[a,b]} f \, d\mu$ quand n tend vers l'infini en refaisant la démonstration vue en 2 ème année, puis une deuxième fois à l'aide du théorème de convergence dominée.

ii) Prenons $[a, b] = [0, 1]$. On suppose réciproquement que $\int_{[0,1]} f_n \, d\mu$ tend vers $\int_{[0,1]} f \, d\mu$ quand n tend vers l'infini, voire même que $\int_{[0,1]} |f_n - f| \, d\mu$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Montrer que ceci n'implique pas que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini. On pourra construire une suite dont les premiers termes sont :

$$f_1 = \chi_{[0,1]},\ f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]},\ f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]},\ f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{2^2}]},$$

$$f_5 = \chi_{[\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2}]},\ f_6 = \chi_{[\frac{2}{2^2},\frac{3}{2^2}]},\ f_7 = \chi_{[\frac{3}{2^2},\frac{4}{2^2}]},\ f_8 = \chi_{[0,\frac{1}{2^3}]},\ \ldots$$

Calculer $\liminf(f_n)$. Trouver une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 presque partout.