Université d'Angers L3

U2 — Série d'exercices n°4. INTEGRATION. 2007-2008

Exercice 1 : les séries vues comme des intégrales de Lebesgue. Soit X un ensemble dénombrable. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans X. On considère la mesure de dénombrement μ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$.
i) Caractériser les applications mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$.
ii) Soit $s : X \to \mathbb{R}$ une application mesurable à valeurs positives telle que pour tout $i > N$, $(s \circ \varphi)(i) = 0$. Montrer que $\int_X s \, d\mu = \sum_{k=0}^{N} (s \circ \varphi)(k)$.
iii) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application mesurable à valeurs positives. En appliquant le théorème de convergence monotone à la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications définies par $(s_n \circ \varphi)(i) = \begin{cases} (f\circ\varphi)(i) & \text{Si } i \leq n, \\ 0 & \text{Si } i > n, \end{cases}$ montrer que $\displaystyle\int_X f \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} (f \circ \varphi)(n)$.
iv) En déduire la "convergence commutative" d'une suite de réels positifs u_n :

La série $\sum u_n$ converge ssi pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge. Dans ce cas, on a l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ pour toute bijection $\varphi : N \to N$.
v) Soit $a_{ij} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ une suite double. En appliquant le théorème de Beppo LEVI, montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij}$.

Exercice 2 : Intégration sur une partie. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure positive μ. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable à valeurs positives. Soit $E \in \mathcal{A}$, on pose

$$\varphi(E) := \int_E f \, d\mu := \int_X f\chi_E \, d\mu.$$

On rappelle que $E \cap \mathcal{A} := \{E \cap A / A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur E et que la restriction de f à E, $f_{|E} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable (exercice 1 Série 2). La restriction de μ à $E \cap \mathcal{A}$, $\mu_{|E\cap\mathcal{A}}$, est une mesure positive sur E.
i) Réciproquement, montrer que toute application mesurable sur E se prolonge en une application mesurable sur X.
ii) Montrer que $\varphi(E) = \int_E f_{|E} \, d\mu_{|E\cap\mathcal{A}}$ (Considérer d'abord le cas où f est simple puis le cas général en appliquant le théorème de convergence monotone). En déduire que si $\mu(E) = 0$ alors $\varphi(E) = 0$.
iii) Montrer que φ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$, en utilisant le théorème de convergence monotone ou de Beppo LEVI.
iv) Montrer que, pour toute application mesurable $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ à valeurs positives

$$\int_X g \, d\varphi = \int_X gf \, d\mu.$$

v) On considère maintenant que f est une application à valeurs complexes appartenant à $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$. Montrer que $f_{|E} \in \mathcal{L}^1(E, \mu_{|E\cap\mathcal{A}}, \mathbb{C})$. Montrer que toute application intégrable sur E se prolonge en une application intégrable sur X.

Montrer ii). A la place de iii), montrer que pour toute suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ disjoints 2 à 2, la série complexe $\sum \varphi(E_n)$ est convergente de somme $\varphi(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n)$. (On dit que φ est une mesure complexe).

Exercice 3 : Comparaison de l'intégrale de Lebesgue et de l'intégrale des applications continues. Nous utiliserons les définitions et les résultats de l'exercice "Integration sur une partie". On admet l'existence de la mesure de Lebesgue μ sur $\mathbb{R}$, muni de la σ-algèbre des boréliens $\mathcal{B}$.

i) Soit $a \leq c \leq b \in \mathbb{R}$. Soit $g \in \mathcal{L}^1([a,b], \mu_{|\mathcal{P}([a,b])\cap\beta}, \mathbb{C})$. Montrer la relation de Chasles :

$$\int_{[a,b]} g\ d\mu = \int_{[a,c]} g\ d\mu + \int_{[c,b]} g\ d\mu$$

ii) Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que f est mesurable sur $[a,b]$ et appartient à $\mathcal{L}^1([a,b], \mu, \mathbb{C})$.

iii) Montrer que l'application $F : [a,b] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_{[a,x]} f\, d\mu$, est dérivable de dérivée $f(x_0)$ en x_0. Indication : majorer $|\int_{[x_0,x_0+h]} f - f(x_0)\ d\mu|$.

iv) En déduire que l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b]} f\, d\mu$ coincide avec l'integrale des applications continues $\int_a^b f(t)\ dt$.

v) Expliquer pourquoi la même démonstration montre que l'intégrale de Riemann coincide avec l'intégrale des applications continues.

Exercice 4 : Applications intégrables de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et séries convergentes. Cette exercice est la suite de l'exercice analogue pour les séries à termes positifs.

On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On note $\ell^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \delta, \mathbb{R})$, où δ est la mesure de dénombrement sur $\mathbb{N}$.

i) Montrer que ℓ^1 est l'espace vectoriel des suites $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que la série numérique $\sum u(n)$ converge absolument. Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{N}} u\, d\delta = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n),$$

quand $u \in \ell^1$.

ii) La fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(n) = u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est-elle dans ℓ^1 ? Que peut-on dire de la série de terme général u_n ?

iii) Soit β une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et soit $u \in \ell^1$. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{N}} u\, d\delta = \sum_{n=0}^{+\infty} (u \circ \beta)(n).$$

En déduire une comparaison de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\beta(n)} = u_{\beta(0)} + u_{\beta(1)} + u_{\beta(2)} + u_{\beta(3)} + \cdots$$

Remarque : On peut montrer en fait que iii) n'est vérifié que pour les séries absolument convergentes (Voir Ramis, tome 4, séries commutativement convergentes).