Université d'Angers L3

U2 — Série d'exercices n°3. INTEGRATION. 2008-2009

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa dérivee f' est une application mesurable.

Exercice 2 Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

i) Supposons que $\mu(X) \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit P l'application définie par $P(A) := \mu(A)/\mu(X)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Montrer que P est une probabilité sur $(X, \mathcal{A})$.

ii) Soit $A \in \mathcal{A}$. On définit la *mesure-trace* de μ sur A, notée μ_A par $\mu_A(B) := \mu(A \cap B)$ pour tout $B \in \mathcal{A}$. Montrer que μ_A est une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.

iii) Soit $A \in \mathcal{A}$ telle que $\mu(A) \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit la *probabilité conditionnelle* de B sachant A par $P(B/A) := \mu(A \cap B)/\mu(A)$ pour tout $B \in \mathcal{A}$. Montrer que l'application $P(./A)$, $B \mapsto P(B/A)$, est une probabilite sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 3 : Mesures positives sur un espace mesurable.

i) Soit X un ensemble et $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On pose $\mu(E) = \#E$ (cardinal de E, élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Démontrer que $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre (sur X) et μ une mesure (sur $(X, \mathcal{P}(X))$). Cette mesure est la *mesure de dénombrement.*

ii) On munit $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$ de la mesure de dénombrement, on pose $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ et $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Comparer $\mu(A_n)$, $\lim(\mu(A_n))$ et $\mu(A)$.

iii) On admet l'existence de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, mesure sur la σ-algèbre des boréliens, telle que la mesure d'un intervalle est égale à la longueur de celui-ci.

a) Démontrer que $\mathbb{Q}$ est un borélien de mesure nulle. Génèralisation ?

b) Démontrer que l'ensemble de Cantor C est un borélien de mesure nulle. Cet ensemble C est défini ainsi : on pose $C_0 = [0, 1]$, pour $n \in \mathbb{N}$, C_n est la réunion de 2^n intervalles fermés disjoints, et on passe de C_n à C_{n+1} en ôtant à chacun des intervalles le tiers central de celui-ci, enfin on pose $C = \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. On a donc :

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \quad C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \quad \text{etc.}$$

Démontrer que C est en bijection avec $\Pi_{n\in\mathbb{N}}\{0, 1\}$: on pourra vérifier que les éléments de C sont de la forme $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j 3^{-j}$, où $a_j = 0$ ou 2 (p.ex., en écrivant en base 3 : $1/3 = 0,02222\ldots$ et $2/3 = 0,2$). En déduire que C n'est pas dénombrable en construisant une surjection de $\Pi_{n\in\mathbb{N}}\{0, 1\}$ vers $[0, 1]$ ou une injection de $[0, 1[$ dans $\Pi_{n\in\mathbb{N}}\{0, 1\}$.

iv) Numérotons les points de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, en écrivant $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, où les x_n sont tous distincts. On pose $A_n =]x_n - (1/3)^{n+1}, x_n + (1/3)^{n+1}[$. Trouver une majoration simple de $\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n)$. Peut-on avoir $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n \supset [0, 1]$? Montrer que $(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) \cap [0, 1]$ est, cependant, un ouvert dense de $[0, 1]$.

v) Soit X un ensemble infini non dénombrable, par exemple $X = \mathbb{R}$, on considère la famille $\mathcal{M}$ des sous-ensembles E de X tels que E ou E^C est fini ou dénombrable.

On pose $\mu(E) = 0$ si E est fini ou dénombrable, et $\mu(E) = 1$ sinon. Démontrer que $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre (sur X) et μ une mesure (sur $(X, \mathcal{M})$).