Université d'Angers L3

U2 — Série d'exercices n°2. INTEGRATION. 2008-2009

Exercice 1 : Restriction de l'ensemble de départ. Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X. Soit $A \subset X$.

i) Montrer que $A \cap \mathcal{A} := \{A \cap B \text{ tel que } B \in \mathcal{A}\}$ est une σ-algèbre sur A.

ii) Montrer que $A \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ ssi $A \in \mathcal{A}$. Montrer que dans ce cas, $A \cap \mathcal{A} = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{A}$.

iii) Soit Y un espace topologique. Soit $f : X \to Y$ une application mesurable. Montrer que la restriction $f_{|A} : A \to Y$ est une application mesurable.

iv) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties de X telle que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$. Soit $f : X \to Y$ une application telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $f_{|A_n} : A_n \to Y$ est mesurable. Montrer que f est mesurable.

Exercice 2 : application mesurable non continue. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit A une partie de X. Soient X' et Y deux espaces topologiques.

i) Montrer qu'une application constante $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable.

ii) A quel condition sur A, l'application caractéristique $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ est mesurable ?

iii) Montrer qu'une application constante $f : X' \to \mathbb{R}$ est continue.

iv) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A quel condition sur A, l'application caractéristique $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue ?

v) Soit $f : X' \to Y$ une application continue. Montrer que f est mesurable pour la σ-algèbre des boreliens sur X'.

vi) Donner un exemple d'application $f : X' \to Y$ mesurable pour la σ-algèbre des boreliens sur X', qui n'est pas continue.

Exercice 3. On rappelle que $\mathbb{R}$ est un ensemble infini non dénombrable. On considère la famille $\mathcal{M}$ des sous-ensembles E de $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition suivante :

ou bien E est fini ou dénombrable,
ou bien le complémentaire E^C de E est fini ou dénombrable.

On notera que E et E^C ne peuvent pas être simultanément finis ou dénombrables puisque leur réunion $\mathbb{R} = E \cup E^C$ n'est pas dénombrable.

i) Démontrer que $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser l'exercice 2 Série 1.

ii) Donner un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dans $\mathcal{M}$.

Exercice 4 :σ-algèbre $\neq$ topologie.

i) Donner une topologie qui n'est pas une σ-algèbre.

ii) Donner une σ-algebre qui n'est pas une topologie.

Exercice 5.

i) Montrer que la fonction E « partie entière »est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

ii) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose que f est continue, sauf en un nombre fini de points. Montrer que f est mesurable. Indication : Construire une suite d'applications continues g_n qui converge vers f.

iii)(facultatif :dûr !) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose que f est continue, sauf peut-être en un nombre dénombrable de points. Montrer que f est mesurable. Indication : Montrer que les restrictions de f à cet ensemble de points dénombrables et au complémentaire de cet ensemble de points dénombrables sont toutes les deux mesurables.

Exercice supplémentaire. Démontrer Th 1.12 chap 1 de Rudin