Université d'Angers L3

U2 — Série d'exercices n°1. INTEGRATION. 2008-2009

Exercice 1.

i) Soient X et Y deux ensembles finis. Démontrer par récurrence sur le cardinal de X que card $Y^X = (\mathrm{card} Y)^{\mathrm{card} X}$.

ii) Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Soit A une partie de X. On appelle application caractéristique de A dans X, notée χ_A, l'application

$$\begin{aligned} \chi_A : X &\rightarrow \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in A, \\ 0 & \text{Si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que l'application $\Psi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$, $A \mapsto \chi_A$ est une bijection.

iii) En déduire que, si X est fini, alors $\mathcal{P}(X)$ est aussi fini et de cardinal $2^{\mathrm{card} X}$.

Exercice 2.

i) Vérifier par récurrence que la formule ci-dessous définit une bijection num : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$:

$$\mathrm{num}(p,q) = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p.$$

ii) En déduire que le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

iii) Démontrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

iv) On considère une famille dénombrable d'ensembles dénombrables : pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_m est dénombrable, c'est-à-dire que $A_m = \{a_{m,0}, a_{m,1}, \ldots, a_{m,n}, \ldots\} = \{a_{m,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. On suppose que les A_m sont disjoints : si $m \neq p$, $A_m \cap A_p = \emptyset$. Démontrer que l'ensemble $A = \cup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ est dénombrable, en définissant une application bijective $\mathbb{N} \to A$.

v) En déduire qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 3. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Démonstration par l'absurde due à Georg Cantor (vers 1870).

Supposons que $\mathbb{R}$ est dénombrable, donc $[0,1[$ l'est aussi, et on peut écrire : $[0,1[= \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Écrivons les x_n en base 10, en interdisant les écritures impropres, c'est-à-dire les écritures où tous les chiffres sont égaux à 9 à partir d'un certain rang (on écrit $0,1000000\ldots$ et non $0,0999999\ldots$) :

$$x_1 = 0, x_{11}x_{12}x_{13}\ldots, \quad x_2 = 0, x_{21}x_{22}x_{23}\ldots, \quad x_3 = 0, x_{31}x_{32}x_{33}\ldots, \quad \text{etc.}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit $y_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $y_n \neq x_{nn}$ et on considère le nombre y qui a pour développement en base 10, $y = 0, y_1 y_2 y_3 \ldots$ Vérifier que ce développement est une écriture propre de y, que $y \in [0,1[$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y \neq x_n$. Conclure.