Université d'Angers | **2008-9**
Licence de Mathématiques-L3 | **U3-Intégration**

Devoir 2 : à rendre la semaine du 01/12/2008.

EXERCICE I. Soit a et $b \in \mathbb{R}^{+*}$ deux réels strictement positifs.

(1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$,
$$\frac{t\exp(-at)}{1-\exp(-bt)} = \sum_{n=0}^{+\infty} t\exp(-(a+nb)t).$$

(2) Montrer que
$$\int_{]0,+\infty[} \frac{t\exp(-at)}{1-\exp(-bt)} d\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} t\exp(-(a+nb)t) d\mu(t).$$

(3) Pour tout $n \geq 0$, montrer la convergence absolue de l'intégrale de Riemann généralisée
$$\int_0^{+\infty} t\exp(-(a+nb)t)dt$$
et que
$$\int_0^{+\infty} t\exp(-(a+nb)t)dt = \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

(4) En déduire que l'intégrale de Lebesgue
$$\int_{]0,+\infty[} t\exp(-(a+nb)t)d\mu(t) = \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

(5) Concluez en montrant que
$$\int_{]0,+\infty[} \frac{t\exp(-at)}{1-\exp(-bt)} d\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

EXERCICE II : Peut-on échanger $\int$ et $\sum$? On pose $g_n(x) = \exp(-nx) - 2\exp(-2nx)$, où n désigne un nombre entier, $n \geq 1$, et x un nombre réel.

(1) Montrer que la série de terme général $g_n(x)$ est convergente pour tout $x > 0$. Calculer sa somme
$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x).$$

(2) Montrer que les g_n, $n \geq 1$, sont intégrables sur $[0, +\infty[$, et que g est intégrable sur $]0, +\infty[$.

(3) Comparer
$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)\Big)dx \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} g_n(x)dx\Big).$$

Expliquer ce résultat.