Université d'Angers **2007-8**
Licence de Mathématiques-L3 **U2-Intégration**

Devoir 2 : à rendre la semaine du 19/11/2007.

EXERCICE : Un exemple de commutation des signes $\int_X$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ pour des applications qui ne sont pas à valeurs positives. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel quelconque fixé. Le but de l'exercice est d'établir la relation suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\exp x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

(1) Montrer la convergence absolue des intégrales $\int_0^1 \frac{\sin ax}{\exp x - 1} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{\exp x - 1} dx$. En déduire que l'intégrale de Riemann généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\exp x - 1} dx$$

est égale à l'intégrale de Lebesgue

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{\sin ax}{\exp x - 1} d\mu(x).$$

(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\frac{\sin ax}{\exp x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(ax) \exp(-nx).$$

(3) Pour tout $n \geq 1$, montrer que

$$\int_{]0,+\infty[} \sin(ax) \exp(-nx) d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \sin(ax) \exp(-nx) dx = \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

(4) Supposons pour l'instant qu'il existe une application $g :]0, +\infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable à valeurs positives telle que $\int_{]0,+\infty[} g(x) d\mu(x)$ soit fini et telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\sin(ax)| \exp(-nx) \leq g(x).$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\exp x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

(5) L'application $g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-nx)$ convient-elle au (4) ?

(6) L'application $g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} |a| x \exp(-nx)$ convient-elle au (4) ?

Pour (5) et (6), utiliser le théorème de convergence monotone ou de Beppo LEVI.