Université d'Angers **2008-9**
Licence de Mathématiques-L3 **U3-Intégration**

Devoir 1 : à rendre la semaine du 20/10/2007.

Problème : Intégration sur une partie.

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure positive μ. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable à valeurs positives.

1) Montrer que si $\mu(X) = 0$ alors la mesure positive μ est la mesure constamment nulle sur X. Que vaut alors $\int_X f\, d\mu$? Prouvez le !

Soit $E \in \mathcal{A}$, on pose

$$\varphi(E) := \int_E f\, d\mu := \int_X f\chi_E\, d\mu.$$

On rappelle que $E \cap \mathcal{A} := \{E \cap A / A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur E et que la restriction de f à E, $f_{|E} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable (exercice 1 Série 2). Il est évident que la restriction de μ à $E \cap \mathcal{A}$, $\mu_{|E\cap\mathcal{A}}$, est une mesure positive sur E.

2) Réciproquement, montrer que toute application h mesurable sur E se prolonge en une application mesurable $\tilde{h}$ sur X.

3) Montrer que $\varphi(E) = \int_E f_{|E}\, d\mu_{|E\cap\mathcal{A}}$ dans le cas où f est l'application caractéristique d'une partie A de X qui appartient à $\mathcal{A}$.

4) En déduire que $\varphi(E) = \int_E f_{|E}\, d\mu_{|E\cap\mathcal{A}}$ dans le cas où f est une application simple.

5) En appliquant le lemme fondamental d'approximation et deux fois le théorème de convergence monotone, en déduire que

$$\varphi(E) = \int_E f_{|E}\, d\mu_{|E\cap\mathcal{A}}$$

dans le cas général où f est une application mesurable à valeurs positives quelconque.

6) En déduire que si $\mu(E) = 0$ alors $\varphi(E) = 0$.