Université d'Angers — **2007-8**
Licence de Mathématiques-L3 — **U2-Intégration**

Devoir 1 : à rendre la semaine du 08/10/2007.

EXERCICE 1 : Image directe et réciproque de reunions, intersections.
Soient X et Y deux ensembles, et $f\ : X \longrightarrow Y$ une application. On considère $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties de X et de Y respectivement. Montrer que :

(1)
$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad , \quad f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

(2)
$$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad , \quad f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

(3) En déduire que $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

(4) Donner un exemple pour lequel l'inclusion ci-dessus est stricte .

(5) Que devient cette inclusion lorsque f est injective ?

EXERCICE 2 : commutation de constructions sur les σ-algèbres.

(1) Soit X un ensemble. Soit $A \subset X$. Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur A. Montrer que
$$\beta := \{B \subset X \text{ tel que } A \cap B \in \mathcal{A}\}$$
est une σ-algèbre sur X.

(2) Soit $\varepsilon \subset \mathcal{P}(X)$. Soit $\sigma(\varepsilon)$ la σ-algèbre engendrée par ε. Montrer que la σ-algèbre sur A engendrée par
$$A \cap \varepsilon := \{A \cap B \text{ tel que } B \in \varepsilon\}$$
est égale à la σ-algèbre trace
$$A \cap \sigma(\varepsilon) := \{A \cap B \text{ tel que } B \in \sigma(\varepsilon)\}.$$
En résumé,
$$\sigma(A \cap \varepsilon) = A \cap \sigma(\varepsilon).$$

(3) En déduire que si (X, τ) est un espace topologique et si $A \subset X$ est muni de la topologie induite τ_A, alors la σ-algèbre des Boréliens sur A, $\beta(A)$, est égale à $A \cap \beta(X)$.

(4) Soient X et Y deux espaces topologiques et $A \subset X$. Soit $\beta(X)$ la σ-algèbre des Boréliens sur X. Soit $f : A \to Y$ une application continue sur A. Munissons A de la σ-algèbre trace $A \cap \beta(X)$. En déduire que f est mesurable sur A.