Université d'Angers **2007-8**
Licence de Mathématiques-L3 **U2-Intégration**

Examen 2ème session Mardi 4/3/2008.

QUESTION 1 ($5 = 2+3$ **points) : Théorème de Continuité sous le signe** $\int$**.**
i) Enoncer le théorème de continuité sous le signe $\int$.
ii) Démontrer le théorème de continuité sous le signe $\int$. (Indication : Interprèter la continuité d'une application en termes de suites convergentes).

EXERCICE 2 ($5 = 1+3+1$ **points) : Image réciproque d'une** σ**-algèbre.**
Soient X et Y deux ensembles. Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur Y. Soit A une partie de Y.
i) Soit $j : A \to Y$ l'application de A dans Y qui à un élément a de A, fait correspondre le même élément a considéré comme élément de Y. Cette application j est appelée habituellement *injection canonique* de A dans Y.

Pour toute partie B de Y, calculer l'image réciproque de B par j, notée $j^{-1}(B)$.
ii) Soit f une application de X dans Y. Montrer que

$$f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{A}\}$$

est une σ-algèbre sur X. (Par définition, $f^{-1}(\mathcal{A})$ désigne donc l'ensemble des parties de X qui sont l'image réciproque d'un élément de $\mathcal{A}$).
iii) Montrer que

$$A \cap \mathcal{A} := \{A \cap B \text{ tel que } B \in \mathcal{A}\}$$

est une σ-algèbre sur A.

EXERCICE 3 ($11 = 2+3+1+3+2$ **points).**
Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue et intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$.
Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on rappelle que χ_A désigne l'application caractéristique de la partie A.
i) En utilisant la définition de l'intégrale de Lebesgue, montrer pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \chi_{\{i\}} \, |f| \, d\mu = 0.$$

ii) En utilisant un des théorèmes de convergence, en déduire que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \chi_{\mathbb{N}} \, |f| \, d\mu = 0.$$

iii) En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \chi_{\mathbb{N}} \, f \, d\mu = 0.$$

iv) Montrer que la suite

$$\int_{\mathbb{R}^+} \exp(-n \sin^2(\pi x)) \, f(x) \, d\mu(x)$$

converge vers zéro.
v) Expliquer par quel argument, on peut obtenir directement (sans utiliser i) et ii)) que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \chi_{\mathbb{N}} \, f \, d\mu = 0.$$