Université d'Angers — **2008-9**
Licence de Mathématiques-L3 — **Intégration**

Examen 2eme session Lundi 20/04/2009 :9h-11h30.

EXERCICE 1 (3 points) : Une application mesurable. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{Si } x \geq 0, \\ -x & \text{Si } x < 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est mesurable.

EXERCICE 2 ($1+3=4$ points) : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure positive μ. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable à valeurs positives.

1) Montrer que si $\mu(X) = 0$ alors la mesure positive μ est la mesure constamment nulle sur X.

2) Que vaut alors $\int_X f \, d\mu$? Prouvez le !

EXERCICE 3 ($1+1+5=7$ points) : Pour tout $x \geq 0$ on pose

$$f(x) \;=\; \int_{[0,1]} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \; d\mu(t)$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

(1) Montrer que pour tout $x \geq 0$, l'application qui à t associe $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$.
(2) Calculer $f(0)$.
(3) Soit x_n une suite quelconque de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Montrer la suite $f(x_n)$ converge vers 0.

Remarque : D'après l'interpretation de la limite d'une application en termes de suites, on a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 4 (6 points) : Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on pose

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n \exp(-nx).$$

Faites, au choix, une seule des deux questions suivantes.

(1) Montrer que f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[1, +\infty[$ et calculer le réel $\int_{[1,+\infty[} f(x)\, d\mu(x)$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $[1, +\infty[$.
(2) Montrer que l'intégrale de Riemann génèralisée $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge et calculer le réel $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

Remarque : Les deux questions sont équivalentes. En n'utilisant que les connaissances de deuxième année, on peut résoudre la question (2). Il est néanmoins plus rapide d'utiliser les connaissances vues cette année et de faire la question (1) directement.