Université d'Angers **2008-9**
Licence de Mathématiques-L3 **Intégration**

Examen 1ere session Mercredi 07/01/2009 :14h-16h30.

QUESTION 1 (2 points) : Donner un exemple de deux applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui soient à la fois :
-intégrables sur $\mathbb{R}$,
-presque partout égales sur $\mathbb{R}$,
-mais pas égales partout.

QUESTION 2 (2 points) : Enoncer le théorème de Riesz-Fischer sur les séries de Fourier qui généralise l'égalité de Parseval.

QUESTION 3 (6 points). Soit X un ensemble. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une σ-algèbre sur X. Soit μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$:

$$A_0 \subset A_1 \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$$

Montrer que la suite $\mu(A_n)$ admet pour limite $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. On justifiera par des doubles inclusions, toutes les égalités d'ensembles utilisées dans cette démonstration du cours.

Indication : Montrer que la suite $\mu(A_n)$ est la suite des sommes partielles d'ordre n d'une série à préciser.

EXERCICE 4 (10 points) :

(1) Montrer que
$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx$$
converge absolument.

(2) Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \exp(-x) \ln x \, dx$$
converge absolument.

(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp(-x).$$

(4) Montrer que pour tout $x \in [0, n]$, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(-x)$.

(5) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx = \int_0^{+\infty} \exp(-x) \ln x \, dx.$$