Université d'Angers **2007-8**
Licence de Mathématiques-L3 **U2-Intégration**

Examen 1ere session Vendredi 21/12/2007.

QUESTION 1 (2 points) : Enoncer le théorème de continuité sous le signe $\int$.

QUESTION 2 (2 points) : Enoncer le théorème de Riesz-Fischer sur les séries de Fourier qui généralise l'égalité de Parseval.

EXERCICE 3 (6 points) : Continuité de l'intégrale d'une application bornée. On admet l'existence de la mesure de Lebesgue μ sur $\mathbb{R}$, muni de la σ-algèbre des boréliens $\mathcal{B}$. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est bornée et mesurable sur $[a, b]$.
i) Montrer que f appartient à $\mathcal{L}^1([a, b], \mu, \mathbb{R})$.
Soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x) := \int_{[a,x]} f\, d\mu$ pour tout $x \in [a, b]$.
ii) Montrer que F est continue à droite en a.
iii) Montrer que pour tout $x_0 \in [a, b[$, F est continue à droite en x_0.
iv) D'après ce qui précède, F est continue sur le segment $[a, b]$. Que peut-on dire de plus sur F lorsque f est continue sur le segment $[a, b]$?

EXERCICE 4 (10 points) : Un exemple de commutation des signes $\int_X$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ pour des applications qui ne sont pas à valeurs positives : Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel quelconque fixé. Le but de l'exercice est d'établir la relation suivante

$$\int_{[0,+\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(ax)\exp(-n^2x)d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^4 + a^2}.$$

(1) Montrer que la série $\sum \sin(ax)\exp(-n^2x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Soit

$$S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(ax)\exp(-n^2x)$$

sa somme.

(2) Pour tout $n \geq 1$, montrer que

$$\int_{[0,+\infty[} \sin(ax)\exp(-n^2x)d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \sin(ax)\exp(-n^2x)dx = \frac{a}{n^4 + a^2}.$$

(3) Montrer que la série

$$\sum \int_0^{+\infty} |\sin(ax)|\exp(-n^2x)dx$$

converge.

(4) En déduire que S est mesurable et intégrable sur sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\int_{[0,+\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(ax)\exp(-n^2x)d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^4 + a^2}.$$