Corrigé Intégration janvier 2007

Exercice 1 Cours

Par définition f est mesurable ssi pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$
$f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$

Preuve de f mesurable $\Rightarrow \forall b \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(]-\infty, b[) \in \mathcal{A}$

Si f mesurable comme $\forall b \in \mathbb{R}$ $]-\infty, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ $f^{-1}(]-\infty, b[) \in \mathcal{A}$

Preuve de $\forall b \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(]-\infty, b[) \in \mathcal{A} \Rightarrow f$ mesurable

- $\forall a \in \mathbb{R}$ $[a, +\infty[= {}^{c}]-\infty, a[$

  donc $f^{-1}([a, +\infty[) = f^{-1}({}^{c}]-\infty, a[)$

  $= {}^{c}f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$ car

  $\mathcal{A}$ stable par passage au complémentaire et
  $f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$

- $]a, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, +\infty[$

  donc $f^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([a + \frac{1}{n}, +\infty[) \in \mathcal{A}$

car $\mathcal{A}$ stable par réunion dénombrable

- $]a, b[\; = \;]a, +\infty[\; \cap \;]-\infty, b[$

donc $f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]a, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, b[) \in \mathcal{A}$

car $\mathcal{A}$ stable par intersection finie

- Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$ $\quad O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n[$

donc $f^{-1}(O) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(]a_n, b_n[) \in \mathcal{A}$

car $\mathcal{A}$ stable par reunion denombrable

Exercice 2 exo + devoir 2

i) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$

$$u^{-1}(O) \subset \mathbb{N} \text{ donc } u^{-1}(O) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

donc u est mesurable

ii) on a vu au i) que tout application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable donc $\forall n \in \mathbb{N}$, l'application s_n est mesurable

$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n(i) \geqslant 0$

$\forall i \in \mathbb{N}$

Si $i \leqslant n$ alors $i \leqslant n+1$

donc si $i \leqslant n \quad s_n(i) = |u(i)| = s_{n+1}(i)$

Si $i > n+1$ alors $i > n$

donc si $i > n+1 \quad s_n(i) = 0 = s_{n+1}(i)$

Si $i = n+1 \quad (s_n)(i) = 0 \leqslant |u(i)| = s_{n+1}(i)$

donc la suite s_n est croissante

donc on peut appliquer le théorème de convergence monotone à la suite s_n on a donc

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\lim_{n \to +\infty} s_n\right) d\delta = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{N}} s_n \, d\delta$$

$\forall i \in \mathbb{N}$ Si $n \geqslant i \quad s_n(i) = |u(i)|$ donc $\lim_{n \to +\infty} s_n(i) = |u(i)|$

donc $\lim_{n \to +\infty} s_n = |u|$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} |u(i)| \mathcal{X}_{\{i\}}$$

où Ψ est l'application caractéristique

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} s_n \, d\delta = \sum_{i=0}^{n} |u(i)| \int_{\mathbb{N}} \Psi_{\{i\}} \, d\delta =$

$$= \sum_{i=0}^{n} |u(i)| \, \delta(\{i\}) = \sum_{i=0}^{n} |u(i)|$$

car $\delta(\{i\}) = \text{cardinal de } \{i\} = 1$

Le théorème de convergence monotone nous dit donc que

$$\int_{\mathbb{N}} |u| \, d\delta = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} |u(i)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u(i)|$$

iii) $u \in \ell^1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\int_{\mathbb{N}} |u| \, d\delta}_{= \sum_{n=0}^{+\infty} |u(n)|} < +\infty$

1^re méthode

Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications définies par

$$(s_n)(i) = \begin{cases} u(i) & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

comme au ii) s_n est mesurable, $\lim_{n \to +\infty} s_n = u$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} s_n \, d\delta = \sum_{i=0}^{n} u(i)$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$|(s_n)(i)| \leq |u(i)|$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad |s_n| \leq |u|$

comme $u \in \ell^1$, $|u| \in \ell^1$

on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite s_n

on obtient que $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} \lim_{n \to +\infty} s_n \, d\delta = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{N}} s_n \, d\delta$

c à d

$$\int_{\mathbb{N}} u \, d\delta = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} u(i) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)$$

2ème methode Si $u \in \ell^1$ alors $u_+ = \max(u, 0)$ et $u_- = \min(u, 0) \in \ell^1$

par définition $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} u \, d\delta = \int_{\mathbb{N}} u_+ \, d\delta - \int (-u_-) \, d\delta$

d'après ii) appliqué à u_+ et $-u_-$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} u_+(n) - \sum_{n=0}^{+\infty} (-u_-)(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} u_+(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} (u_-)(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_+(n) + u_-(n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u(n))$$

car si $\sum u_n$ CV et $\sum v_n$ CV alors $\sum (u_n + v_n)$ CV et on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_n + v_n\right)$$

et $\quad u_+(n) + u_-(n) = u(n)$

Exercice 3 Cours + refait pendant l'exo 4 Serie 5

i) $S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k$

Les f_k sont integrables donc mesurables donc

leur somme finie $\sum_{k=0}^{n} f_k$ est aussi mesurable

donc comme la limite d'applications mesurables est mesurable

S est mesurable

$$|S(x)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$$

D'apres le théorème de Beppo LEVI

Comme $|f_n|$ est mesurable et positive

donc $\displaystyle\int \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1$

donc

$$\int |S| \leq \int \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$$

donc S est integrable

ii) Appliquons le théorème de convergence dominée

à la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

$\forall n \in \mathbb{N}$ S_n est mesurable

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = S(x)$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} f_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$

or $\int \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| < +\infty$

donc on a la domination et on peut appliquer le théorème de convergence dominé

la suite $\int S_n = \sum_{k=0}^{n} \int f_k$ converge vers $\int S$ c à d la serie $\sum \int f_n$ converge et a pour somme $\int S$.

Exercice 4 Exercice 1 Serie 5

$\|g\|_\infty$ est un majorant presque partout de $|g|$

donc $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ presque partout

$g \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu, \mathcal{A})$ donc $\|g\|_\infty < +\infty$

en multipliant par $|f(x)|$ on a

$$|f(x)||g(x)| = |f(x)\, g(x)| \leq |f(x)| \, \|g\|_\infty$$

donc $\int_X |f(x)\, g(x)| \, d\mu(x) \leq \int_X |f(x)| \, \|g\|_\infty \, d\mu(x)$

$\underset{\text{def}}{\parallel}$ $\qquad\qquad$ $\underset{\text{par linearité de l'intégrale}}{\parallel}$

$\|f g\|_1 \qquad \left(\int_X |f(x)| \, d\mu(x)\right) \times \|g\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty$