

Corrigé Devoir 2 Intégration 2008-9

(1)

Exercice I

$$(1) \forall t \in]0, +\infty[\quad 0 < e^{-bt} < 1 \text{ car } b \in]0, +\infty[$$

$$\text{donc } \frac{1}{1 - e^{-bt}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-bt})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nbt}$$

$$\text{donc } \frac{t e^{-at}}{1 - e^{-bt}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-at} e^{-nbt}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-(a+nb)t} \text{ pour tout } t \in]0, +\infty[$$

$$(2) \forall n \in \mathbb{N} \text{ Considérons l'application } b_n(t) = t e^{-(a+nb)t}$$

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$b_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ donc mesurable sur } \mathbb{R}^{+*}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad b_n(t) \geq 0$$

Donc on peut appliquer le Théorème de Leppo Levi.

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{+*}} \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-(a+nb)t} d\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{+*}} t e^{-(a+nb)t} d\mu(t)$$

d'après (1) on a donc

(2)

$$\int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{t e^{-at}}{1-e^{-bt}} d\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{+*}} t e^{-(a+nb)t} d\mu(t)$$

$$(3) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad t e^{-(a+nb)t} \geq 0$$

donc la convergence absolue est équivalente à la convergence
l'application $t \mapsto t e^{-(a+nb)t}$ continue sur $\mathbb{R}^+$

donc le problème est or $+\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^x t e^{-(a+nb)t} dt &= \left[t \frac{e^{-(a+nb)t}}{-a+nb} \right]_0^x \\ &- \int_0^x \frac{e^{-(a+nb)t}}{-a+nb} dt = -x \frac{e^{-(a+nb)x}}{a+nb} + 0 \\ &+ \frac{1}{a+nb} \left[\frac{e^{-(a+nb)t}}{-(a+nb)} \right]_0^x = \frac{-x e^{-(a+nb)x}}{a+nb} \\ &+ \frac{1}{(a+nb)^2} - \frac{1}{(a+nb)^2} e^{-(a+nb)x} \end{aligned}$$

quand $x \rightarrow +\infty \quad \frac{e^{-(a+nb)x}}{(a+nb)^2} \rightarrow 0 + \frac{1}{(a+nb)^2} + 0$

donc $\int_0^{+\infty} t e^{-(a+nb)t} dt$ converge et est égal à $\frac{1}{(a+nb)^2}$

(4) ^{1^{re} méthode} Comme l'intégrale de Riemann généralisée

$$\int_0^{+\infty} t e^{-(a+nb)t} dt \text{ converge absolument}$$

(3)

$f: t \mapsto e^{-(a+nb)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

$$\text{et } \int_{[0, +\infty[} e^{-(a+nb)t} d\mu(t) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+nb)t} dt = \frac{1}{(a+nb)^2}$$

Comme $[0, +\infty[$ est la réunion disjointe de $\{0\}$ et de $]0, +\infty[$

$$\chi_{[0, +\infty[} = \chi_{\{0\}} + \chi_{]0, +\infty[}$$

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}} f \chi_{[0, +\infty[} d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \chi_{\{0\}} d\mu + \int_{\mathbb{R}} f \chi_{]0, +\infty[} d\mu$$

$$\text{c à d } \int_{[0, +\infty[} f d\mu = \int_{\{0\}} f d\mu + \int_{]0, +\infty[} f d\mu$$

$$\text{Comme } \mu(\{0\}) = \mu([0, 0]) = 0 - 0 = 0$$

$$\int_{\{0\}} f d\mu = 0 \text{ d'après Exo 2 Serie 4}$$

$$\begin{aligned} \text{ou même : } \int_{\{0\}} f d\mu &= \int_{\{0\}} f(0) d\mu \stackrel{\text{par linéarité}}{=} f(0) \int_{\{0\}} 1 d\mu = f(0) \mu(\{0\}) \\ &= f(0) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

(5) D'après (2)

(4)

$$\int_{]0, +\infty[} \frac{t e^{-at}}{1 - e^{-bt}} d\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0, +\infty[} t e^{-(a+nb)t} d\mu(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} \quad \text{d'après (4)}$$

(4) 2^{ème} méthode: On considère l'intégrale impropre de Riemann $\int_0^{+\infty} t e^{-(a+nb)t} dt$ (avec problème en $+\infty$ seulement!)
 même
 on considère l'intégrale impropre de Riemann $\int_0^{+\infty} t e^{-(a+nb)t} dt$ (avec problème en 0 et en $+\infty$!). On applique le résultat général suivant

théorème Soit $f:]a, b[\xrightarrow{\mathbb{C}, \mathbb{R}} \mathbb{C}$ une application continue.
 l'intégrale impropre de Riemann $\int_a^b f(t) dt$ (avec problème en a et en b !) converge absolument

ssi f est intégrable au $]a, b[$. Dans ce cas

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{]a, b[} f d\mu$$

Remarque D'après l'exo 1 Soit 5 appliqué 2 fois

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt = \int_{]a, \frac{a+b}{2}[} f d\mu \quad \text{et} \quad \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) dt = \int_{[\frac{a+b}{2}, b[} f d\mu.$$

J'apporte la 1^{ère} méthode

(5)

$$\int_{\left[\frac{a+b}{2}, b\right]} f \, d\mu = \int_{\left[\frac{a+b}{2}, b\right]} f \, d\mu$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} f \, d\mu &= \int_{[a, \frac{a+b}{2}]} f \, d\mu + \int_{[\frac{a+b}{2}, b]} f \, d\mu \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) \, dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) \, dt \stackrel{de b}{=} \int_a^b f(t) \, dt \end{aligned}$$

Exercice 2 - Séries

Exercice II $g_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx} = (e^{-x})^n - 2(e^{-2x})^n$

1° Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < 1$.

$$\sum_{k=1}^n x^k = x + \dots + x^n = x \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x}$$

donc la série géométrique $\sum x^n, n \geq 1$ converge et a pour somme $\frac{x}{1-x}$.

Comme $x > 0$ $e^{-x} < 1$ et $e^{-2x} < 1$ donc la série $\sum g_n(x)$

formée de 2 séries convergentes est convergente et on a

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-2x})^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - 2 \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$$

Il y a plus rapide!

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-x}(1-e^{-2x}) - 2e^{-2x}(1-e^{-x})}{(1-e^{-x})(1-e^{-2x})} = \frac{e^{-x} - e^{-3x} - 2e^{-2x} + 2e^{-3x}}{(1-e^{-x})(1-e^{-2x})} \\ &= \frac{e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x}}{(1-e^{-x})(1-e^{-2x})} = \frac{e^{-x}(e^{-2x} - 2e^{-x} + 1)}{(e^{-x}-1)(e^{-2x}-1)} \\ &= \frac{e^{-x}(\overbrace{e^{-x}-1}^2)}{(e^{-x}-1)(e^{-x}-1)(e^{-x}+1)} = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)} \\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{1}{1+e^x} \end{aligned}$$

2° g_m est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc pb en $+\infty$ (7)

$$x^2 |g_m(x)| \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} x^2 e^{-nx} + x^2 e^{-2nx} \xrightarrow{\text{qd } x \rightarrow +\infty} 0$$

car l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x

donc $|g_m(x)|$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage

de $+\infty$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ CV (Riemann $2 > 1$), donc

d'après le critère de négligeabilité $\int_1^{+\infty} |g_m(x)| dx$ CV

donc $\int_0^{+\infty} g_m(x) dx$ CVA donc d'après l'exo 5

g_m est intégrable sur $[0, +\infty[$.

$g(x) = \frac{1}{1+e^x}$ sur $]0, +\infty[$ donc g prolongeable par

continuité en 0 à droite donc pas de pb en 0

en $+\infty$ $g(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$. Comme $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = 1$ CV,

Par équivalence $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ CV. d'où $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ CVA

donc d'après l'exo 1 5, g est intégrable

sur $]0, +\infty[$ et $\int_{+\infty} g d\mu = \int_0^{+\infty} g(x) dx$.

remarque $g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-2^n) = -\infty$.

3°) Calculons $\int_0^{+\infty} g(x) dx$

(8)

1^{re} méthode : la méthode classique pour les fonctions rationnelles en e^x . On fait le changement de variable $u = e^x$ $x = \ln u$

$$du = e^x dx$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$. On décompose en éléments

simples $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{(1+u) - u}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$

donc $\int_0^{+\infty} g(x) dx = \left[\ln u - \ln(1+u) \right]_1^{+\infty} = \left[\ln \frac{u}{1+u} \right]_1^{+\infty}$

$$= \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

2^e méthode $\int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx = \left[-\ln(e^{-x} + 1) \right]_0^{+\infty}$

$$= \ln 2 - \cancel{\ln 1}$$

$$\int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(e^{-nx} - 2e^{-2nx} \right) dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n} - \frac{2e^{-2nx}}{-2n} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = 0 \neq \int_0^{+\infty} g(x) dx$$

Explication du résultat :

Pour montrer $\int \Sigma = \Sigma \int$, on connaît deux théorèmes
 + th de convergence monotone. Mais ici on ne peut
 pas l'appliquer à $b_n = \sum_{k=1}^n g_k$. Car b_n n'est pas
 une suite croissante car les g_n ne sont pas tous ≥ 0 .

+ th de convergence dominée. $b_n = \sum_{k=1}^n g_k$

n'est pas dominée car sinon les hypothèses du théorème de
 convergence dominée seraient vérifiées et on aurait $\int \Sigma = \Sigma \int$

Ici exceptionnellement on peut calculer la somme partielle
 d'ordre n $b_n = \sum_{k=1}^n g_k$. On pourrait donc vérifier que

b_n n'est pas dominée directement

• Souvent pour une série Σg_n quelconque, il n'est
 pas possible de calculer explicitement $b_n = \sum_{k=1}^n g_k$

Pour montrer que b_n est dominée, on procède comme
 ceci. (cf Exo 5 i et ii) Serie 5)

$$|b_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |g_k(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |g_n(x)|$$

D'après le thm de convergence monotone

$$\int_{[0, +\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} |g_n(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0, +\infty[} |g_n(x)| dx$$

Supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0, +\infty[} |g_n(x)| dx < +\infty$

Alors $|f_n(x)|$ est dominée par $\sum_{n=1}^{+\infty} |g_n(x)|$ qui est intégrable d'après la supposition.

On a donc démontré Theorem 1.3.8 Rudin ou dans le

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0, +\infty[} |g_n(x)| dx < +\infty$

alors on peut permuter $\int$ et $\sum$

comme le théorème après la définition de de fonctions presque partout.