

Correction Devoir 2 Intégration 2007-8

(1). Montrons que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \int_{]0, +\infty[} \frac{\sin ax}{e^x - 1} d\mu(x)$$

Problème en 0 : $f(x) = \frac{\sin ax}{e^x - 1}$ pas défini en 0

mais prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = a$

donc $\int_0^1 \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx$ CVA donc d'après l'exo 1 Série 5

$$\int_0^1 \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \int_{]0, 1]} \frac{\sin ax}{e^x - 1} d\mu x \text{ qui est intégrable}$$

Problème en $+\infty$

$$\left| \frac{\sin ax}{e^x - 1} \right| \leq \frac{1}{e^x - 1} \sim \frac{1}{e^x}. \text{ Comme } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x} \text{ CV,}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx$ CVA donc d'après l'exo 1 Série 5

$$\frac{\sin ax}{e^x - 1} \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[\text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \int_{[1, +\infty[} \frac{\sin ax}{e^x - 1} d\mu$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx$ CVA et est égale à $\int_{]0, +\infty[} \frac{\sin ax}{e^x - 1} d\mu(x)$ (2)

$$\int_0^1 \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \int_{]0, 1]} \frac{\sin ax}{e^x - 1} d\mu(x) + \int_{]1, +\infty[} \frac{\sin ax}{e^x - 1} d\mu(x)$$

(2) • Exprimez $\frac{\sin ax}{e^x - 1}$ comme la somme d'une série

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{\sin ax}{e^x - 1} = \frac{\sin ax}{e^x(1 - e^{-x})} = e^{-x} \sin ax \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

Si $|X| < 1$ $\frac{1}{1 - X} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n$. Comme $x > 0$, $X = e^{-x} < 1$

donc $\frac{\sin ax}{e^x - 1} = e^{-x} \sin ax \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n =$

$$= \sin ax \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin ax) e^{-nx}$$

(3) • $\forall n \geq 1$. Calculons $\int_0^{+\infty} \sin ax e^{-nx} dx$

$$\int_0^{+\infty} \sin(ax) e^{-nx} dx = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{i ax - nx} dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{iax-nx} dx = \left[\frac{e^{(ia-n)x}}{ia-n} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n-ia} = \frac{n+ia}{n^2+a^2} \quad (3)$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| e^{(ia-n)x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(ia-n)x} = 0$

donc $\int_0^{+\infty} (\sin ax) e^{-nx} dx = \frac{a}{n^2+a^2}$

(4). Appliquons le théorème de convergence dominée à

$$b_n = \sum_{k=1}^n (\sin ax) e^{-kx}$$

b_n continue sur $]0, +\infty[$ donc mesurable sur $]0, +\infty[$

$$|b_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\sin ax| e^{-kx} \leq g(x)$$

Admettons pour l'instant qu'il existe un tel g intégrable sur $]0, +\infty[$.

Les hypothèses du th de convergence dominée sont satisfaites donc

$$\int_{]0, +\infty[} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin ax) e^{-nx} \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0, +\infty[} \sin ax e^{-nx} d\mu(x)$$

$$\int_{]0, +\infty[} \sin ax e^{-nx} dx = \int_{]0, +\infty[} \sin ax e^{-nx} dx = \int_0^{+\infty} \sin ax e^{-nx} dx \quad (4)$$

d'après l'exo 1 Série 5 car $\int_0^{+\infty} \sin ax e^{-nx} dx$ CVA

$\left(\int_0^{+\infty} \sin ax e^{-nx} dx \right) \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx$. On a donc établi la relation voulue

(5) Essayons $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \gg \sum_{n=1}^{+\infty} |\sin ax| e^{-nx}$

On applique le th de convergence monotone à $f_n = \sum_{k=1}^n e^{-kx}$

donc g est mesurable et $\int_{]0, +\infty[} g(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0, +\infty[} e^{-nx} dx$

$\int_0^{+\infty} e^{-nx} dx$ CVA et est égale à $1/n$ donc $\int_{]0, +\infty[} g(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

rate' g n'est pas intégrable.

(6) Essayons $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} ax e^{-nx} \gg \sum_{n=1}^{+\infty} |\sin ax| e^{-nx}$

mais car $\forall x \in \mathbb{R}^+ / |\sin x| \leq x$. En intégrant par parties,

$\int_0^{+\infty} ax e^{-nx} dx$ CVA et est égale à $\frac{a}{n^2}$. Donc par

convergence monotone $\int_{]0, +\infty[} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} ax e^{-nx} \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0, +\infty[} ax e^{-nx} d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2} < +\infty$ car série de Riemann.