

Corrigé Devoir 1 Intégration 2008-9 ①

Pour tout espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, toute mesure positive μ sur $(X, \mathcal{A})$ et toute application $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable à valeurs positives, on définit

$$\int_X f \, d\mu$$

Si $E \in \mathcal{A}$ alors la restriction de μ à $E \cap \mathcal{A} = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{A}$ est une mesure positive sur l'espace mesurable $(E, E \cap \mathcal{A})$ et la restriction de f à E , $f|_E: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est aussi mesurable à valeurs positives donc

$$\int_E f|_E \, d\mu|_{E \cap \mathcal{A}} \text{ est défini}$$

Le but du Devoir 1 est de montrer que

$$\int_E f|_E \, d\mu|_{E \cap \mathcal{A}} = \int_X f \chi_E \, d\mu$$

qui est donc noté pour simplifier

$$\int_E f \, d\mu$$

En appliquant mal la formule de l'énoncé $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$
Erreur vu dans la moitié des copies !

$$\int_E f|_E d\mu|_{E \cap \mathcal{A}} = \int_X f|_E \chi_E d\mu|_{E \cap \mathcal{A}}$$

En effet $\int_X f|_E \chi_E d\mu|_{E \cap \mathcal{A}}$ n'a aucun sens !

Car $\mu|_{E \cap \mathcal{A}}$ n'est pas une mesure sur $(X, \mathcal{A})$
mais une mesure sur $(E, E \cap \mathcal{A})$.

1) Supposons que $\mu(X) = 0$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, par monotonie de μ , comme $A \subset X$, on a $\mu(A) \leq \mu(X) = 0$

Comme $\mu(A) \geq 0$ on a donc $\mu(A) = 0$.

Donc μ est l'application constamment nulle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ A & \longmapsto & 0 \end{array}$$

On va donc avoir $\int_X f d\mu = 0$.

C'est pratiquement évident mais on peut le démontrer pour être plus rigoureux

cas où f est simple

Comme f est simple, $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ où les $A_i \in \mathcal{A}$.

Par définition de l'intégrale d'une application simple

$$\int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \times 0 = 0$$

car on vient de voir que comme $A_i \in \mathcal{A}$ $\mu(A_i) = 0$

cas général

Par définition, $\int_X f d\mu$ est la borne supérieure

(4)

des $\int_X \phi d\mu$ où ϕ est simple et $\phi \leq f$

On veut de voir que $\int_X \phi d\mu = 0$ car ϕ est simple

$$\text{donc } \int_X f d\mu = \sup_{\substack{\phi \text{ simple} \\ \phi \leq f}} \int_X \phi d\mu = \sup \{0\} = 0$$

Toutes les intégrales sur X sont nulles

2) Soit $h: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable.

$$\text{Posons } \tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus E = E^c \end{cases}$$

Montrons que $\tilde{h}$ est mesurable dans X dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soit V un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$

cas $0 \notin V$

$$\tilde{h}^{-1}(V) = h^{-1}(V) \in E \cap \mathcal{A} \text{ car } h \text{ est mesurable}$$

$$\text{Or } E \cap \mathcal{A} = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \text{ donc } h^{-1}(V) \in \mathcal{A}$$

cas $0 \in V$

$$\tilde{h}^{-1}(V) = h^{-1}(V) \cup E^c$$

Comme dans le cas $0 \notin V$, $h^{-1}(V) \in \mathcal{A}$

Comme $E \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ stable par passage au complémentaire

$E^c \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ stable par réunion finie,
 $\tilde{h}^{-1}(V) \in \mathcal{A}$

3) f est une application caractéristique mesurable

donc $f = \chi_A$ où $A \in \mathcal{A}$

$$\text{donc } \varphi(E) = \int_X \chi_A \chi_E d\mu = \int_X \chi_{A \cap E} d\mu = \mu(A \cap E)$$

$\mathcal{B}|_E = \mathcal{V}_A|_E$ est égale à l'application

(6)

caractéristique de $A \cap E$ considérée comme partie de E ,

$$\mathcal{V}_{A \cap E} : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

$$\text{donc } \int_E \mathcal{B}|_E d\mu|_{E \cap \mathcal{A}} = \mu|_{E \cap \mathcal{A}}(A \cap E) = \mu(A \cap E)$$

$$\text{donc } \varphi(E) = \int_E \mathcal{B}|_E d\mu|_{E \cap \mathcal{A}}$$

4) $\mathcal{B}$ est une application simple donc $\mathcal{B} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{V}_{A_i}$
où les $A_i \in \mathcal{A}$

Par linéarité de $\int_X$

$$\varphi(E) = \int_X \mathcal{B} \mathcal{V}_E d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_X \mathcal{V}_{A_i} \mathcal{V}_E d\mu$$

Par linéarité de $\int_E$

$$\int_E \mathcal{B}|_E d\mu|_{E \cap \mathcal{A}} = \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{V}_{A_i}|_E d\mu|_{E \cap \mathcal{A}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E \mathcal{V}_{A_i}|_E d\mu|_{E \cap \mathcal{A}}$$

d'après la question précédente

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad \int_X \varphi_{A_i} \cdot \varphi_E d\mu = \int_E \varphi_{A_i/E} d\mu/E \wedge dt$$

donc

$$\varphi(E) = \int_E b/E d\mu/E \wedge dt$$

6) Supposons que $\mu(E) = 0$. On a donc $\mu/E \wedge dt(E) = 0$

d'après 1) $\mu/E \wedge dt$ est donc la mesure constamment nulle

sur $(E, E \wedge dt)$. D'après 1) on a donc

$$\int_E b/E d\mu/E \wedge dt = 0. \text{ D'après la question}$$

précédente on obtient donc que $\varphi(E) = 0$

5) D'après le lemme fondamental d'approximation, il existe une suite croissante d'applications simples

$$\varphi_n : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.q.}$$

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = b(x)$$

• La suite $\varphi_n \varphi_E$ est une suite croissante d'applications

$$X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mesurables positives convergeant simplement vers f/E

(8)

En appliquant le théorème de convergence monotone

à cette suite, on obtient que

$$\int_X f/E \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \rho_n/E \, d\mu$$

• La suite ρ_n/E est une suite croissante d'applications de E dans $\mathbb{R}$ mesurables positives.

En appliquant à nouveau le théorème de convergence monotone, on obtient que

$$\int_E f/E \, d\mu/E \cap \mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \rho_n/E \, d\mu/E \cap \mathcal{A}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme ρ_n est simple d'après 4)

$$\int_X \rho_n/E \, d\mu = \int_E \rho_n/E \, d\mu/E \cap \mathcal{A}$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\text{donc } \varphi(E) = \int_X f/E \, d\mu = \int_E f/E \, d\mu/E \cap \mathcal{A}$$

Bibliographie : Malliaron
Gramain

Intégration Chapitre 1 Proposition 7.5.1
Définition 2 Chapitre 5