

Corrige Devoir 1: Integration 2007-8

Exo 1

Propriété Si $A \subset B \subset X$ alors $f(A) \subset f(B)$

preuve: Soit $y \in f(A)$ donc $\exists a \in A$ tq $y = f(a)$

comme $A \subset B$ $a \in B$ comme $y = f(a)$ $y \in f(B)$

donc $f(A) \subset f(B)$

□

(1) $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_i$ pour tout $i \in I$

donc d'après Propriété $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset f(A_i)$ pour tout $i \in I$

c à d $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

□

Pour tout $i \in I$ $A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ donc d'après

Propriété, $\forall i \in I, f(A_i) \subset f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$

donc $\bigcup_{i \in I} f(A_i) \subset f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$

Soit $y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ donc $\exists a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ tq $y = f(a)$

$a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ donc $\exists i \in I$ tq $a \in A_i$

(2)

$y = f(a)$ avec $a \in A_i$ donc $y \in f(A_i)$

on a donc montré qu'il existe $i \in I$ tq $y \in f(A_i)$

c à d $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ donc $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

Bilan $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ $\square$

(2) Soit $x \in X$ quelconque

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I \quad f(x) \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I \quad x \in f^{-1}(B_i)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

$$\text{donc } f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \square$$

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \exists i \in I$$

$$\text{tq } f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tq } x \in f^{-1}(B_i)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \text{ . Donc } f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

3) Par définition B^c est l'unique partie de Y

$$\text{vérifiant } B \cap B^c = \emptyset \text{ et } B \cup B^c = Y$$

(3)

d'après 2), on a donc

$$f^{-1}(B^c) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(B^c \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(B^c) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(B^c \cup B) = f^{-1}(Y) = X$$

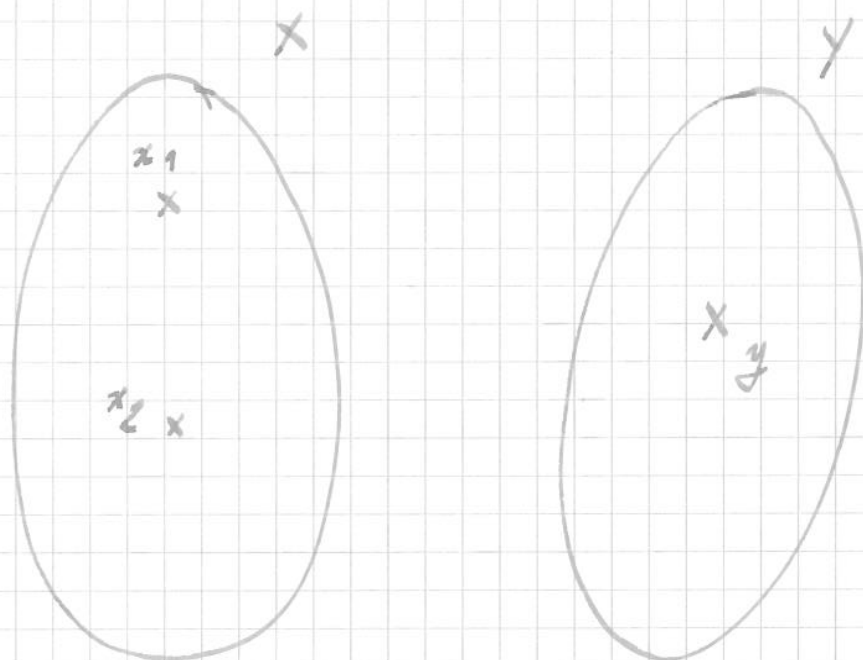
Par définition, $f^{-1}(B)^c$ est l'unique partie de X

vérifiant $f^{-1}(B)^c \cap f^{-1}(B) = \emptyset$

et $f^{-1}(B)^c \cup f^{-1}(B) = X$

donc $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)$

(4)



Soit $X = \{x_1, x_2\}$ et $Y = \{y\}$

Soit $f: X \longrightarrow Y$ l'application constante

c-à-d $f(x_1) = f(x_2) = y$

Prenons $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$

$$f(A_1) = \{y\} \quad f(A_2) = \{y\}$$

$$\text{donc } f(A_1) \cap f(A_2) = \{y\}$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{donc } f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$

On a donc bien $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \neq \{y\} = f(A_1) \cap f(A_2)$
Remarquons que f n'est pas injectif!

(5) Montrons que si f est injectif

$$\text{alors } f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

Rais. Soit $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

donc $\forall i \in I \quad y \in f(A_i)$ donc $\forall i \in I \quad \exists a_i \in A_i$

tg $y = f(a_i)$. Attention à priori, a_i change avec l'indice i . Mais ici f est

injectif donc $\forall i \in I \quad \forall j \in I \quad f(a_i) = y = f(a_j)$

implique $a_i = a_j$

Soit $a \in A$ tg $\forall i \in I \quad a = a_i$.

Comme $a_i \in A_i$, $a \in A_i$ pour tout $i \in I$

donc $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$ Comme $y = f(a)$,

$y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$. Donc $\bigcap_{i \in I} f(A_i) \subset f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$

Exo 2 Briane - Pages Proposition 4.5 (a)

(1) β est un ensemble de parties de X vérifiant

• $A \cap X = A \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ σ -algèbre sur A

donc $X \in \beta$ donc β est non vide

• Soit $B \in \beta$ donc $A \cap B \in \mathcal{A}$

donc le complémentaire de $A \cap B$ dans A
appartient à $\mathcal{A}$

c-à-d $A \cap B^c \in \mathcal{A}$ donc $B^c \in \beta$

• Soient $B_1, \dots, B_n, \dots$ une suite d'éléments de β

donc $A \cap B_1, \dots, A \cap B_n$ est une suite d'éléments

de $\mathcal{A}$. Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A \cap B_n \in \mathcal{A}$.

$$\text{Or } \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A \cap B_n = A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \right)$$

donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \in \beta$.

(2) A l'exo 1 Serie 2, on a vu que
 $A \cap \mathfrak{o}(E)$ est une $\mathfrak{o}$ -algèbre sur A .

Pour montrer que $A \cap \mathfrak{o}(E)$ est la $\mathfrak{o}$ -algèbre
 sur A engendrée par $A \cap E$, il faut et il
 suffit de montrer que $A \cap \mathfrak{o}(E)$ est la plus
 petite $\mathfrak{o}$ -algèbre sur A contenant $A \cap E$.

• Preuve de $A \cap E \subset A \cap \mathfrak{o}(E)$

Par définition, un élément de $A \cap E$ est de la
 forme $A \cap B$ tel que $B \in E$.

Comme $\mathfrak{o}(E)$ est la $\mathfrak{o}$ -algèbre engendrée par E ,
 $E \subset \mathfrak{o}(E)$. Donc $B \in \mathfrak{o}(E)$ donc $A \cap B \in A \cap \mathfrak{o}(E)$
 donc $A \cap E \subset A \cap \mathfrak{o}(E)$.

• Soit $\mathcal{A}$ une $\mathfrak{o}$ -algèbre sur A contenant $A \cap E$.

Montrons que $A \cap \mathfrak{o}(E) \subset \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{B} = \{ B \in \mathcal{P}(X) \text{ tel que } A \cap B \in \mathcal{A} \}$

Soit $B \in E$, $A \cap B \in A \cap E \subset \mathcal{A}$
 donc $B \in \mathcal{B}$ donc $E \subset \mathcal{B}$.

d'après (1), β est une σ -algèbre sur X . (7)

β contient $\mathcal{E}$. Or $\sigma(\mathcal{E})$ est la plus petite

σ -algèbre sur X contenant $\mathcal{E}$. Donc $\sigma(\mathcal{E}) \subset \beta$.

Donc $\forall B \in \sigma(\mathcal{E})$, $A \cap B \in \mathcal{A}$

donc $A \cap \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$

(3) Par définition, $T_A = A \cap T$.

Par définition, $\beta(X) = \sigma(T)$

et $\beta(A) = \sigma(T_A) = \sigma(A \cap T)$

D'après (2) $\sigma(A \cap T) = A \cap \sigma(T) = A \cap \beta(X)$

(4) Notons par T' la topologie sur Y

$f: (A, T_A) \longrightarrow (Y, T')$ est une application

continue. Donc d'après le cours,

$f: (A, \sigma(T_A)) \longrightarrow (Y, T')$ est mesurable.

D'après (3), la σ -algèbre des boréliens sur A ,

qui est $\sigma(T_A)$ par définition, coïncide avec $A \cap \beta(X)$

donc $f: (A, A \cap \beta(X)) \longrightarrow (Y, T')$ est

mesurable