

Contrôle Continu Corrigé

du 14-11-2008 Intégration

(1) C'est une question de cours.

Soit V un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$.

Comme $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue,

$g^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

Par définition $\mathcal{B}$ est une σ -algèbre contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}$ donc $g^{-1}(V) \in \mathcal{B}$

donc g est mesurable

(2)

$$\text{Posons } h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

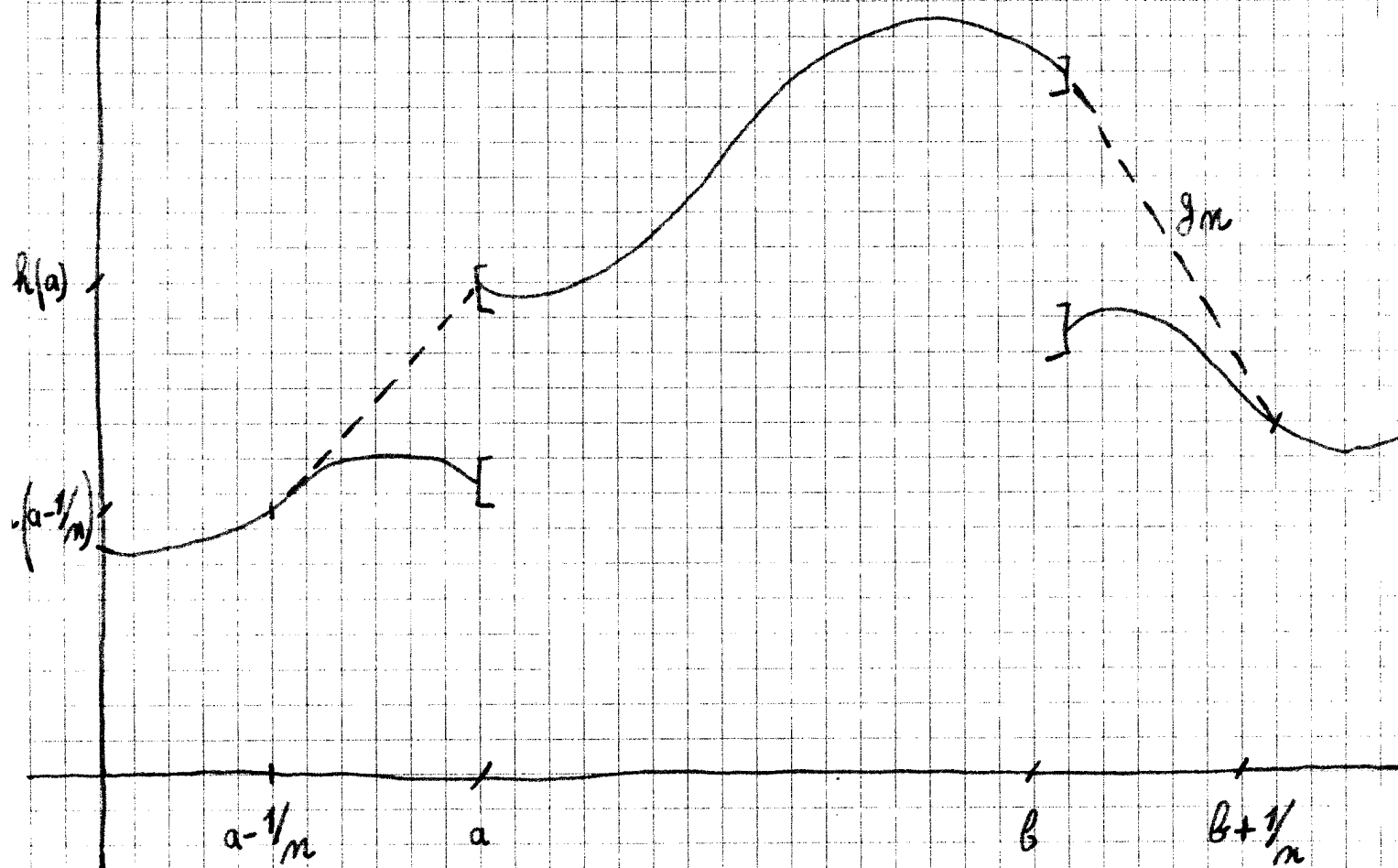
Sur $]-\infty, a[$ ou $]b, +\infty[$ h coïncide avec l'application nulle donc est continue

Sur $]a, b[$ h coïncide avec f donc est continue aussi.

(3)

Exercice 5 ii) Serie 2

(2)

 $\forall m \in \mathbb{N}^*$

Posons

$$g_m(x) = \begin{cases} \bullet h(x) & \text{si } x \leq a - \frac{1}{m} \text{ ou } x \in [a, b] \\ & \text{ou } x \geq b + \frac{1}{m} \\ \bullet n [h(a) - h(a - \frac{1}{m})] (x - a) + h(a) \\ & = n [h(a) - h(a - \frac{1}{m})] x + (1 - an) h(a) + mah(a - \frac{1}{m}) \\ & \text{si } a - \frac{1}{m} \leq x \leq a \\ \bullet n [h(b + \frac{1}{m}) - h(b)] (x - b) + h(b) \\ & = n [h(b + \frac{1}{m}) - h(b)] x + (1 + bn) h(b) - nb h(b + \frac{1}{m}) \\ & \text{si } b \leq x \leq b + \frac{1}{m} \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ g_n est continue sur $\mathbb{R}$

donc d'après (1) g_n est mesurable (par rapport à $\mathcal{F}$)

$$\forall x \in [a, b] \quad g_n(x) = h(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h(x)$$

Soit $x \in]-\infty, a[$ Pour n assez grand $x < a - \frac{1}{n}$

donc $g_n(x) = h(x)$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = h(x)$

De même si $x \in]b, +\infty[$ comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} b + \frac{1}{n} = b$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = h(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = h(x)$

donc h limite d'applications mesurables est mesurable

(4) • $\forall B \in \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ Exercice 1 Sens 2 a)

$[a, b] \cap B \subset [a, b]$ donc $[a, b] \cap B \in \mathcal{P}([a, b])$

donc $[a, b] \cap \mathcal{F} \subset \mathcal{P}([a, b]) \subset \mathcal{A}$

$[a, b] \cap \mathcal{F}$ est bien un ensemble de parties

de $[a, b]$

• Comme $\mathcal{F}$ est une σ -algèbre sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$

donc $[a, b] = [a, b] \cap \mathbb{R} \in [a, b] \cap \mathcal{P}$

- Stable par passage au complémentaire dans $[a, b]$?

Soit $A \in [a, b] \cap \mathcal{P}$ donc $\exists B \in \mathcal{P}$ tq $A = [a, b] \cap B$

Comme $\mathcal{P}$ stable par passage au complémentaire dans $\mathbb{R}$

$$B^c = \underset{\mathbb{R}}{C^B} \in \mathcal{P}$$

donc $C_{[a, b]}^A = [a, b] \cap B^c \in [a, b] \cap \mathcal{P}$

- Stable par réunion dénombrable ?

Soit $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ une suite d'éléments de $[a, b] \cap \mathcal{P}$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \exists B_n \in \mathcal{P}$ tq $A_n = [a, b] \cap B_n$

Comme $\mathcal{P}$ est stable par réunion dénombrable $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{P}$

donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([a, b] \cap B_n) = [a, b] \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in [a, b] \cap \mathcal{P}$

(5) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$ quelconque. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$x \in h^{-1}([a, b] \cap V) \iff x \in [a, b] \text{ et } h(x) \in V$$

Exercice 1 Serie 2 111)

$$\iff x \in [a, b] \text{ et } x \in h^{-1}(V)$$

$$\text{donc } h^{-1}([a, b] \cap V) = [a, b] \cap h^{-1}(V)$$

Comme h mesurable, $h^{-1}(V) \in \mathcal{P}$

donc $h^{-1}([a, b] \cap V) \in [a, b] \cap \mathcal{P}$

(6) Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. ⑤

D'après (2) f se prolonge en une application h qui d'après (3) est mesurable sur $\mathbb{R}$.

D'après (5) $f = h|_{[a, b]}$ est mesurable sur $[a, b]$

Question 2

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de parties de X

définie par $B_0 = A_0$

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad \text{si } n \geq 1$$

$$\text{donc } B_n = A_n \cap A_{n-1}^c$$

Comme $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire et intersection finie, $B_n \in \mathcal{A}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n \subset A_n \quad \text{donc } B_0 \cup \bigcup_{n \geq 1} B_n \subset A_0 \cup \bigcup_{n \geq 1} A_n = A_\infty$$

Par récurrence sur n , montrons que $A_n \subset B_0 \cup \bigcup_{m \geq 1} B_m$

vrai pour $n = 0$ car $B_0 = A_0$

Supposons le vrai au rang $n-1$ $A_{n-1} \subset B_0 \cup \bigcup_{m \geq 1} B_m$

Soit $x \in A_n$

Si $x \notin A_{n-1}$ alors $x \in A_n \setminus A_{n-1} = B_n \subset B_0 \cup \bigcup_{m \geq 1} B_m$

Si $x \in A_{n-1}$ alors par hypothèse de récurrence

$$x \in B_0 \cup \bigcup_{m \geq 1} B_{m-1} \subset B_0 \cup \bigcup_{m \geq 1} B_m$$

$$\text{donc } \forall x \in A_n, x \in B_0 \cup \bigcup_{m \geq 1} B_m$$

$$\text{Par double inclusion } A_n = B_0 \cup \bigcup_{m \geq 1} B_m = \bigcup_{A=0}^n B_A$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n \subset A_n \text{ donc } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (6)$$

$$\text{Soit } x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ donc } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } x \in A_n$$

$$\text{Or } A_n = B_0 \cup \dots \cup B_n \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$$

$$\text{donc } x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m \text{ donc } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$$

$$\text{Par double inclusion } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Montrons que les B_n sont disjointes 2 à 2

$$\text{Soient } m \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ tq } m \neq n. \text{ Montrons } B_m \cap B_n = \emptyset$$

Par symétrie supposons que $m < n$

$$B_m \subset A_m \subset A_{n-1} \text{ car } m < n-1$$

$$\text{donc } B_m \cap B_n \subset A_{n-1} \cap B_n = \emptyset \text{ par définition de } B_n$$

$$\text{donc } B_m \cap B_n = \emptyset$$

Comme les B_n sont disjointes 2 à 2, par additivité dénombrable

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n).$$

$$\text{par additivité finie } \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) = \sum_{k=0}^n \mu(B_k)$$

Par définition, la suite $\sum_{k=0}^n \mu(B_k)$ admet pour

$$\text{limite } \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

Exercice 3

(7)

Soit $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \longmapsto f(x-t) g(t)$

- Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque fixe

L'application $t \longmapsto f(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
 donc mesurable.

g est intégrable donc mesurable

Le produit de 2 applications est mesurable

Donc $h(x, \cdot): t \longmapsto f(x-t) g(t)$ est mesurable

- Soit $t \in \mathbb{R}$ quelconque fixe

L'application $h(\cdot, t): x \longmapsto f(x-t) g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
 car f est continue

- Pour tout $x, t \in \mathbb{R}$

$$|h(x, t)| = |f(x-t)| |g(t)| \leq M |g(t)|$$

$$\int_{\mathbb{R}} M |g(t)| d\mu(t) = M \int_{\mathbb{R}} |g(t)| d\mu(t) < +\infty$$

car g est intégrable

Les hypothèses du théorème de continuité sous $\int$ sont
 vérifiées. On a donc

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, t) d\mu(t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

Erreurs courantes vues dans les copies

(8)

Exercice 1

- (1) β n'est pas égal à l'ensemble des
ouverts de $\mathbb{R}$. On a seulement une inclusion
de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ dans β
- (4) Pour montrer que $[a, b] \cap \beta$ est une σ -algèbre
sur $[a, b]$, il faut montrer que pour tout $A \in [a, b] \cap \beta$,
le complémentaire de A dans $[a, b]$ appartient encore
à $[a, b] \cap \beta$.
Il ne faut pas confondre ce complémentaire avec le
complémentaire dans X !
-
- $A \in [a, b] \cap \beta \not\Rightarrow A \in [a, b] \text{ ou } A \in \beta$
n'implique pas
à priori car $[a, b] \cap \beta$ n'est pas une vraie
intersection de $[a, b]$ et de β !

Question 2. Pour la démontrer, on n'a pas le droit
d'appliquer le théorème de convergence monotone
qui vient après dans le cours ! En effet, le
théorème de convergence monotone se démontre à partir
de la question 2