

Correction Contrôle Continu 25/10/2007

①

Exercice 1

(1) En général $f(A^c) \neq f(A)^c$

$$\text{Soit } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2$$

$$\text{Prenons } A = \mathbb{R}^+ \quad A^c = \mathbb{R}^{-*}$$

$$f(A) = \mathbb{R}^+ \quad f(A^c) = \mathbb{R}^{+*}$$

$$f(A)^c = \mathbb{R}^{-*} \quad \text{Donc } f(A^c) \neq f(A)^c$$

2) Montrons que $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$

Soit $x \in X$ quelconque fixe

$$x \in f^{-1}(B^c) \iff f(x) \in B^c \iff f(x) \notin B$$

$$\iff x \notin f^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(B)^c$$

Exercice 2

(1) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, par définition de la continuité $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Par définition, les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des boréliens ②
 $\mathcal{C}$ d'appartenance à $\mathcal{B}$.

Donc $f^{-1}(0) \in \mathcal{B}$. Pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$,
 $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}$ donc f est mesurable.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ Comme $a + \frac{1}{n} > a$, $[a + \frac{1}{n}, +\infty[\subset]a, +\infty[$.

donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a + \frac{1}{n}, +\infty[\subset]a, +\infty[$.

Soit $x \in]a, +\infty[$. Donc $x > a$. Comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a + \frac{1}{n} = a$, pour tout $\varepsilon > 0$

$\exists N \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq N$ $a + \frac{1}{n} \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Prenons $\varepsilon = x - a$ $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tq $a + \frac{1}{N} < a + \varepsilon = x$.

donc $x \in [a + \frac{1}{N}, +\infty[$ donc $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a + \frac{1}{n}, +\infty[$

donc $]a, +\infty[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a + \frac{1}{n}, +\infty[$

donc par double inclusion $]a, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a + \frac{1}{n}, +\infty[$

(3) et (4) Montrons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Par définition, la σ -algèbre des boréliens $\mathcal{B}$
contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$. Or $\forall B \in \mathcal{A}$,

(3)

$]-\infty, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc

donc $\mathcal{B}$ est une σ -algèbre contenant les demi-droites $]-\infty, b[$. Par définition, $\mathcal{A}$

est la plus petite σ -algèbre contenant les demi-droites $]-\infty, b[$. Donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Montrons que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

$\forall b \in \mathbb{R} \quad]-\infty, b[\in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une

σ -algèbre, $]-\infty, b[^c = [b, +\infty[\in \mathcal{A}$

pour tout $b \in \mathbb{R}$. D'après (2) pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$]a, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, +\infty[$$

comme $\mathcal{A}$ stable par réunion dénombrable

$$\text{et } [a + \frac{1}{n}, +\infty[\in \mathcal{A}$$

alors $]a, +\infty[\in \mathcal{A}$

$$]a, b[= \bigcap_{\mathcal{A}}]a, +\infty[\cap \bigcap_{\mathcal{A}}]-\infty, b[$$

comme $\mathcal{A}$ stable par intersection finie

$$]a, b[\in \mathcal{A}.$$

Maintenant, Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$

(4)

$$\left. \begin{aligned} O &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n[\\ \forall n \in \mathbb{N} \quad]a_n, b_n[&\in \mathcal{A} \end{aligned} \right\} \text{ donc } O \in \mathcal{A}$$

car $\mathcal{A}$ stable par réunion dénombrable.

Donc $\mathcal{A}$ est une σ -algèbre contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}$. Par définition $\mathcal{B}$ est la plus petite σ -algèbre contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}$.
Donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Finalement $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Exercice 3

Montrons que la suite $\mu(E_n)$ converge vers $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)$

(i) Soit $B_0 = E_0$, $B_1 = E_1 \setminus E_0$

$$B_n = E_n \setminus E_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1$$

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad B_k \subset E_k \subset E_n \text{ donc } \bigcup_{k=0}^n B_k \subset E_n$$

Soit $x \in E_n$. Supposons par récurrence sur n

que $\bigcup_{k=0}^{n-1} B_k$ contient E_{n-1} .

Si $x \notin E_{n-1}$. Alors $x \in E_n \setminus E_{n-1} = B_n$.

$$\text{donc } x \in \bigcup_{k=0}^n B_k$$

(5)

Si $x \in E_{n-1}$. Comme par hypothèse de récurrence

$$E_{n-1} \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i, \quad x \in \bigcup_{i=0}^n B_i.$$

donc bien $E_n \subset \bigcup_{i=0}^n B_i$

dans les 2 cas

donc par double inclusion $E_n = \bigcup_{i=0}^n B_i$

$\forall m \in \mathbb{N} \quad B_m \subset E_m$ donc $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m$

Soit $x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m$ donc $\exists m \in \mathbb{N} \text{ tq } x \in E_m$

Comme $E_m = \bigcup_{i=0}^m B_i$ $x \in \bigcup_{i=0}^m B_i \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$

donc $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$.

Soit $i < n$ $B_i \subset E_i \subset E_{n-1}$

donc $B_i \cap B_n = \emptyset$.

D'après la condition d'additivité dénombrable

$$\mu\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n)$$

D'après la condition d'additivité finie

$$\mu(E_n) = \sum_{i=0}^n \mu(B_i)$$

(6)

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \mu(B_i)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)$$

(1) 1^{re} démonstration : on refait une partie de la démonstration du théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned} \varphi(E) &= \int_X s \varphi_E d\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_{A_i} \right) \varphi_E d\mu \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \int \varphi_{A_i} \varphi_E d\mu. \end{aligned}$$

$$\varphi_{A_i} \varphi_E = \varphi_{A_i \cap E}$$

$$\text{donc } \varphi(E) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

$$\text{donc } \varphi(E_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap E_n)$$

la suite d'éléments de $\mathcal{A}$, $(A_i \cap E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Donc d'après les propriétés d'une mesure

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i \cap E_n\right)$$

(7)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_i \cap E_n) = A_i \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(E_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu \left(A_i \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \right) \\ = \varphi \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)$$

2^{ème} méthode : On applique le théorème de convergence monotone

$$E_n \subset E_{n+1} \text{ donc } \varphi_{E_n} \leq \varphi_{E_{n+1}}$$

$$\text{donc } \Delta \varphi_{E_n} \leq \Delta \varphi_{E_{n+1}}$$

Δ mesurable à valeurs positives donc

$\Delta \varphi_{E_n}$ est mesurable à valeurs positives

$$\text{Montrons que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{E_n}(x) = \varphi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}(x)$$

$$\text{première cas } x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \text{ donc } \varphi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}(x) = 0$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad x \notin E_n \text{ donc } \varphi_{E_n}(x) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{E_n}(x) = 0.$$

$$\text{cas } x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n. \text{ Donc } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } x \in E_N$$

$$\forall n \geq N \text{ comme } E_N \subset E_n, \varphi_{E_n}(x) = 1$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{E_n}(x) = 1.$

Comme $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, $\chi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}(x) = 1$

Dans les cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{E_n}(x) = \chi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}(x)$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x) \chi_{E_n}(x) = \rho(x) \chi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}(x).$

D'après le théorème de convergence monotone

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \rho \chi_{E_n} = \int_X \rho \chi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}$$

c.à.d

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(E_n) = \varphi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)$$

Remarque : On n'a pas utilisé que ρ est simple dans cette 2^{ème} méthode.

Variante des deux méthodes : On montre que φ est une mesure positive (cf exo 2 iii) Seue 4) et on utilise la propriété générale d'une mesure rappelée dans l'énoncé.

Question 4

Théorème de convergence monotone

Soit μ une mesure positive sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite croissante
d'applications mesurables à valeurs positives (éventuellement
infinies)

Alors $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ est une
application mesurable positive de X dans $\overline{\mathbb{R}}$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

existe et est égale à
égalité dans $[0, +\infty]$

