

Corrigé Intégration 2^{ème} session 2008-9

Exercice 1

Voir exo 1 du Corrigé Intégration 2^{ème} session 2006-7.

comparer avec la question (3) de l'exercice 1 du contrôle continu 2008-9

Exercice 2

Voir question 1) du problème du Devoir 1 2008-9

Exercice 3

②

(1) Pour tout $x \geq 0$, l'application qui à t associe $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$

est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1]$

donc $t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est intégrable au sens de Lebesgue

$$\text{sur } [0, 1] \text{ et } \int_{[0,1]} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} d\mu(t) = \int_0^1 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

$$(2) f(0) = \int_{[0,1]} \frac{e^{-0t^2}}{1+t^2} d\mu(t) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[\text{Arctan } t \right]_0^1$$

$$= \text{Arctan } 1 - \text{Arctan } 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$(3) f(x_n) = \int_{[0,1]} \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2} d\mu(t)$$

$$\text{Soit } b_n(t) = \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2}$$

b_n est continue sur $[0, 1]$ donc mesurable sur $[0, 1]$

$$\forall t \in [0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t) = 0$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1] \quad |b_m(t)| = \frac{e^{-x_m t}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \quad (3)$$

or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, 1]$ donc

intégrable sur $[0, 1]$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur $[0, 1]$ à la suite b_m :

$$\text{La suite } b(x_m) = \int_{[0, 1]} \frac{e^{-x_m t^2}}{1+t^2} d\mu(t) \text{ converge}$$

$$\text{vers } \int_{[0, 1]} \lim_{m \rightarrow +\infty} b_m(t) d\mu(t) = 0$$

Remarque: on ne peut pas appliquer le théorème de convergence monotone en général car la suite x_m n'est pas supposée croissante.

Exercice 4

(1) On va appliquer le théorème de Beppo LEVI

Soit $b_n(x) = n \exp(-nx)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$

b_n continue sur $[1, +\infty[$ donc mesurable sur $[1, +\infty[$

$\forall x \geq 1 \quad b_n(x) \geq 0.$

Donc les hypothèses du théorème de Beppo LEVI sont vérifiées.

Donc d'après Beppo LEVI

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \exp(-nx)$ est mesurable sur $[1, +\infty[$

$$\text{et } \int_{[1, +\infty[} f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[1, +\infty[} b_n(x) d\mu(x)$$

$$\int_1^x b_n(x) dx = \int_1^x n e^{-nx} dx = \left[-e^{-nx} \right]_1^x = e^{-n} - e^{-nx}$$

$\downarrow$ quand $x \rightarrow +\infty$
 $e^{-n} - 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x b_n(x) dx$ existe et est égale à e^{-n}

c à d $\int_1^{+\infty} b_n(x) dx$ converge (absolument) et $\int_1^{+\infty} b_n(x) dx = e^{-n}$

donc b_m est intégrable au sens de Lebesgue sur $[1, +\infty[$ ⑤

$$\text{et } \int_{[1, +\infty[} b_m(x) d\mu(x) = \int_1^{+\infty} b_m(x) dx = e^{-m}$$

$$\text{donc } \int_{[1, +\infty[} f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[1, +\infty[} b_n(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$$

$$= e^{-1} \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1} < +\infty \text{ donc } f \text{ intégrable sur } [1, +\infty[$$

(2) On va calculer explicitement $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} n X^n \text{ en posant } X = e^{-x}$$

$$\forall x \geq 1 \quad 0 < e^{-x} < e^{-1} < 1$$

$$\text{donc } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) X^n - \sum_{n=0}^{+\infty} X^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} X^n = \frac{1}{1-X} \text{ pour tout } |X| < 1$$

en dérivant terme à terme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) X^n = \frac{1}{(1-X)^2}$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n X^n = \frac{1}{(1-X)^2} - \frac{1}{(1-X)}$ pour tout $|X| < 1$ (6)

donc $f(x) = \frac{1}{(1-e^{-x})^2} - \frac{1}{(1-e^{-x})}$

donc $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(1-e^{-x})^2} - \frac{1}{(1-e^{-x})} \right) dx$

Changement de variables posant $X = e^{-x}$
 donc $x = -\ln X$ $dx = -\frac{dX}{X}$

$= \int_{e^{-1}}^0 \left(\frac{1}{(1-X)^2} - \frac{1}{(1-X)} \right) \frac{-dX}{X}$

$= \int_0^{1/e} \left[\frac{1}{X(1-X)^2} - \frac{1}{X(1-X)} \right] dX$

$\frac{1}{X(1-X)^2} - \frac{1}{X(1-X)} = \frac{1 - (1-X)}{X(1-X)^2} = \frac{X}{X(1-X)^2} = \frac{1}{(1-X)^2}$

donc $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{1/e} \frac{dX}{(1-X)^2} = \left[\frac{1}{1-X} \right]_0^{1/e} =$

(7)

$$= \frac{1}{1 - e^{-1}} - 1 = \frac{1 - (1 - e^{-1})}{1 - e^{-1}} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

$$= \frac{1}{e} \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e - 1}$$