

Corrigé 2^{ème} session

Integration 2007-8

Question 1

a) Théorème de continuité sous le signe $\int$

Soit X un espace métrique / Par exemple X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit $(T, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure positive μ

Soit $f: X \times T \longrightarrow \mathbb{C}$
 $(x, t) \longmapsto f(x, t)$

une application définie sur $X \times T$ telle que

a) $\forall x \in X$, l'application partielle $f(x, \cdot): T \longrightarrow \mathbb{C}$
 $t \longmapsto f(x, t)$ est mesurable sur T

b) $\forall t \in T$, l'application partielle $f(\cdot, t): X \longrightarrow \mathbb{C}$
 $x \longmapsto f(x, t)$ est continue sur X

c) Il existe une application $g: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$
 mesurable à valeurs positives telle que $\int_X g d\mu < +\infty$
 et $\forall x \in X, \forall t \in T, |f(x, t)| \leq g(t)$.
 Alors l'application $F: X \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto F(x) := \int_X f(x, t) d\mu(t)$$

est définie et continue sur X

ii) Soit $l \in X$ quelconque fixé.

Comme X est un espace métrique,

F est continue en l si pour toute suite x_n convergente vers l , la suite $F(x_n)$ converge vers $F(l)$.

Donc considérons une suite x_n convergente vers l

d'après a), $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_n, \cdot)$ est mesurable

d'après b) $\forall t \in T$, la suite $f(x_n, t)$ converge vers $f(l, t)$

d'après c) $\exists g: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in T \quad |f(x_n, t)| \leq g(t)$$

$$\text{et } \int g(t) d\mu(t) < +\infty$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée

à la suite d'applications $f_n = f(x_n, \cdot)$.

On obtient que l'application $f(l, \cdot): T \rightarrow \mathbb{R}$

est intégrable sur T et

la suite $F(x_n) = \int_X f(x_n, t) d\mu(t)$

converge vers $\int_X f(\ell, t) d\mu(t) = F(\ell)$

Exercice 2

1) Soit $x \in A$.

$$x \in g^{-1}(B) \Leftrightarrow g(x) \in B \Leftrightarrow x \in B$$

donc $g^{-1}(B) = A \cap B$

11) • $\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{A})$ est non vide :

$\mathcal{A}$ est une σ -algèbre sur Y donc $\emptyset \in \mathcal{A}$

donc $\emptyset = \mathcal{B}^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{A})$

• $\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{A})$ stable par passage au complémentaire :

Soit $C \in \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{A})$ donc $\exists B \in \mathcal{A}$ tel que $C = \mathcal{B}^{-1}(B)$

$\mathcal{A}$ σ -algèbre donc $B^c \in \mathcal{A}$

donc $C^c = \mathcal{B}^{-1}(B)^c = \mathcal{B}^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$

- $f^{-1}(dt)$ stable par réunion dénombrable :

Soit $C_0, C_1, \dots, C_m, \dots$ une suite d'éléments de $f^{-1}(dt)$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \exists B_n \in dt$ tq $C_n = f^{-1}(B_n)$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in f^{-1}(dt)$$

car comme dt est une σ -algèbre, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in dt$

1.1.1) Prenons $X = A$ et f égale à l'inclusion canonique j .

$$f^{-1}(dt) = j^{-1}(dt) = \{j^{-1}(B) \text{ tel que } B \in dt\}$$

$$\stackrel{\text{d'après 1)}}{=} \{A \cap B \text{ tel que } B \in dt\} = A \cap dt.$$

d'après 1.1) $f^{-1}(dt)$ est une σ -algèbre sur $X = A$

donc on a remarqué que $A \cap dt$ est une

σ -algèbre (Exo 1 Série 2 question 1)

Cet exercice n'est donc qu'une généralisation simple de l'exo 1 Série 2 question 1. C'est la même démonstration.

Exercice 3

(5)

$$1) \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \chi_{\{x\}} / \beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1/\beta(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \chi_{\{x\}}(x) / \beta(x) = \chi_{\{1\}}(x) / \beta(1)$$

$$\text{donc } \chi_{\{x\}} / \beta = \chi_{\{1\}} / \beta(1)$$

Comme $\{1\}$ est une fermée donc une localisation, l'application

$\chi_{\{1\}}$ est mesurable. Donc son produit

$\chi_{\{1\}} / \beta = \chi_{\{1\}} / \beta(1)$ par l'application

constante $1/\beta(1)$ est mesurable. car $1/\beta(1)$ est une constante

$$\int_{\mathbb{R}^+} \chi_{\{x\}} / \beta \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{\{1\}} / \beta(1) \, d\mu(x) = \frac{1}{\beta(1)} \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{\{1\}} \, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{\beta(1)} \mu(\{1\}) \text{ par définition de l'intégrale de Lebesgue}$$

$$= \frac{1}{\beta(1)} \mu([1, 1]) = \frac{1}{\beta(1)} (1 - 1) = 0$$

par définition de la mesure de Lebesgue

$$14) \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \chi_{\{i\}}(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{+\infty} 0 = 0 & \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ 0 + \underset{x \text{ terme}}{+0} + \underset{\text{terme}}{1} + 0 + +0 = 1 & \text{si } x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{donc } \chi_N(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \chi_{\{i\}}(x)$$

$$\text{donc } \chi_N(x)/|B(x)| = \sum_{i=0}^{+\infty} \chi_{\{i\}}(x)/|B(x)|$$

$\forall i \in \mathbb{N} \quad \chi_i/|B|$ mesurable à valeurs positives

Donc on peut appliquer le théorème de Borel LEVI

à la suite d'applications $\chi_i/|B|$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \chi_N(x)/|B(x)| \, d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{i=0}^{+\infty} \chi_{\{i\}}(x)/|B(x)| \, d\mu(x) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{\{i\}}(x)/|B(x)| \, d\mu(x) \underset{\text{d'après 1)}}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

Variante: ERM de convergence monotone appliquée à $S_n = \sum_{i=0}^n \chi_i/|B|$

$$iii) \left| \int_{\mathbb{R}^+} \psi_N b \, d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^+} \psi_N |b| \, d\mu = 0$$

donc
$$\int_{\mathbb{R}^+} \psi_N b \, d\mu = 0$$

iv)
$$\bullet \quad \sin^2(\pi x) = 0 \iff \sin \pi x = 0 \iff \pi x = 0[\pi] \\ \iff x \in \mathbb{N}$$

donc
$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \sin^2(\pi x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \quad \sin^2(\pi x) > 0$$

donc
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-n \sin^2 \pi x) b(x) = \begin{cases} 1 \times b(x) & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

donc
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-n \sin^2 \pi x) b(x) = \psi_N(x) b(x)$$

$\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}$ l'application qui à x associe $\exp(-n^2 \sin^2(\pi x)) \times b(x)$ est continue donc mesurable sur $\mathbb{R}^+$

$$\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

$$\left| \exp(-n \sin^2(\pi x)) \times f(x) \right| \leq |f(x)|$$

Par hypothèse $\int |f(x)| d\mu(x) < +\infty$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite d'applications

$$g_n(x) = e^{-n^2 \sin^2(\pi x)} f(x).$$

On obtient que la suite $\int_{\mathbb{R}^+} g_n(x) d\mu(x)$

converge $\int_{\mathbb{R}^+} \chi_N f d\mu = 0$ d'après (11)

v) $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{i\}$ réunion dénombrable disjointe

donc $\mu(\mathbb{N}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(\{i\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} (1-i) = 0$

1^{ère} méthode

$\forall x \in X \setminus \mathbb{N} \quad \chi_N(x) f(x) = 0 \times f(x) = 0$

c à d $\chi_N f = 0$ presque partout

donc $\int_{\mathbb{R}^+} \chi_N f = \int_{\mathbb{R}^+} 0 = 0$

2^{ème} méthode

$$\int_{\mathbb{R}^+} \chi_N f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_N f \, d\mu = 0$$

car $\mu(N) = 0$ Exo 4 11) Serie 4

En fait ici, la démonstration de 1) et 11)
est un cas particulier de la démonstration
de la question 11) de l'Exo 4 Serie 4

14