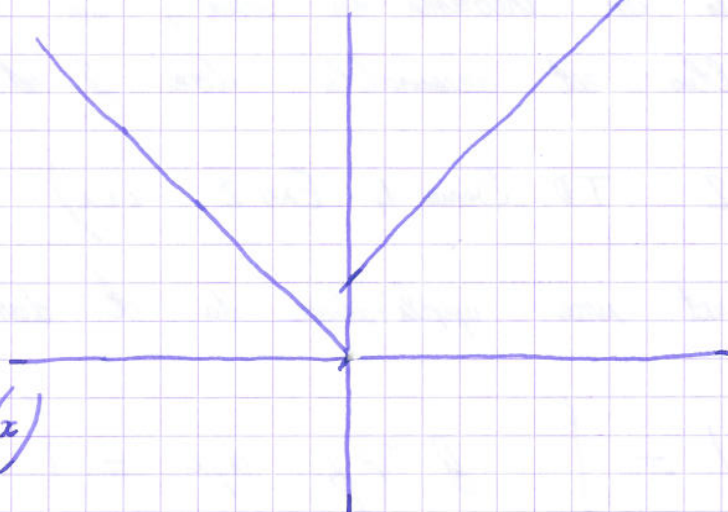


Corrige Integration 2^{eme} session 2006-7

Exercice 1

1^{ere} methode



$$f(x) = |x| + \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$$

L'application valeur absolue $| \cdot | : x \mapsto |x|$ est continue donc mesurable

$\mathbb{R}^+$ fermée de $\mathbb{R}$ donc est un borélien de $\mathbb{R}$

donc l'application caractéristique $\chi_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

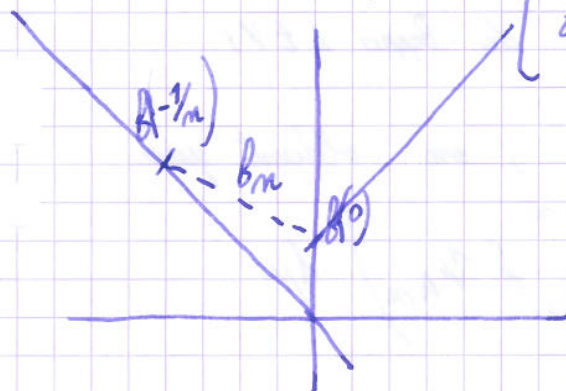
est mesurable. Comme f est la somme de 2 applications mesurables, f est mesurable

2^e methode : methode valable pour toute application continue partout sur $\mathbb{R}$ sauf en un point

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

posons

$$b_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \text{ ou } x \leq -\frac{1}{n} \\ f(0) + nx(f(0) - f(-\frac{1}{n})) & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x < 0 \end{cases}$$



droite reliant les points $(0, f(0))$ et $(-\frac{1}{n}, f(-\frac{1}{n}))$

$\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc mesurable

(2)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

D'après un théorème du cours, la limite d'applications mesurables est mesurable. donc f est mesurable

Exercice 2 TD Serie 4 Exo 2 (111)

φ est une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$

$$\bullet \varphi(\emptyset) = \int_X f \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$

• Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$
disjoint 2 à 2

$$\text{Il reste à démontrer que } \varphi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(A_n)$$

$$\text{c à d } \int_X f \chi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f \chi_{A_n} d\mu$$

$A_n \in \mathcal{A}$ donc χ_{A_n} est mesurable et positif. f est mesurable donc et positif

le produit $f \chi_{A_n}$ est mesurable et à valeurs positives

Donc on peut appliquer le théorème de Beppo LEVI

à la suite d'applications $f \chi_{A_n}$, on obtient que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f \chi_{A_n} d\mu = \int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f \chi_{A_n} \right) d\mu$$

Pour tout $x \in X$, $\psi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \end{cases}$ (3)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_{A_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N} \quad x \notin A_n \\ 1 & \text{si } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } x \in A_n \end{cases}$$

donc $\psi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_{A_n}(x)$

donc $f(x) \psi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x) \psi_{A_n}(x)$

donc $\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f \psi_{A_n} \right) d\mu = \int_X f \psi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} d\mu$

On a donc démontré que f est une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$

Exercice 3 Voir la corrigé de l'examen de Janvier 2006-7

Exercice 4 Les particularités de TD Serie 5 Exo 4 prendre $y = -ix$

$$\exp(-t^2) \cosh(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-t^2) \frac{x^{2n} t^{2n}}{(2n)!}$$

Soit $f_n(t) = \exp(-t^2) \frac{x^{2n} t^{2n}}{(2n)!}$

$$\|f_n\|_1 = \int_{[0, +\infty[} \exp(-t^2) \frac{|x|^{2n} t^{2n}}{(2n)!} d\mu(t)$$

(4)

$$= \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) \frac{x^{2n} t^{2n}}{(2n)!} dt$$

car comme b_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\int_0^{+\infty} b_n(t) dt$ converge absolument, l'intégrale de Lebesgue de b_n coïncide avec l'intégrale de Riemann généralisée de b_n (et b_n intégrable).
donc $\|b_n\|_1 = 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$

Appliquons la règle de D'Alembert à $\|b_n\|_1$

$$\frac{\|b_{n+1}\|_1}{\|b_n\|_1} = \frac{(2n+1)}{2} \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow{\text{quand } n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

donc $\sum \|b_n\|_1$ converge. On peut donc

appliquer les résultats de l'exercice 3.

D'après l'exercice 3 i) $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(t) = \exp(-t^2) \operatorname{ch}(xt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après l'exercice 3 ii) la série réelle $\sum \int_{[0, +\infty[} b_n(t) d\mu(t)$ converge et a pour somme $\int_{[0, +\infty[} \exp(-t^2) \operatorname{ch}(xt) d\mu(t)$

(5)

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) \operatorname{ch}(xt) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) \frac{x^{2n} t^{2n}}{(2n)!} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

A cause de la simplification par $(2n+1)$
 dans $\frac{\|B_{n+1}\|_1}{\|B_n\|_1}$, on voit que cette expression se
 simplifie. En effet

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (2n-1) \times 2n}{2^n \times 2^n \times n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} x^{2n}}{2^{2n+1} n!} \cdot \text{Donc } \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) \operatorname{ch}(xt) dt \text{ est}$$

$$\text{égale à } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{x^{2n}}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp \frac{x^2}{2}.$$

Remarque: Au lieu d'utiliser l'exo 3, par parité, on
 peut supposer que $x \geq 0$ et appliquer le théorème de
 Beppo LEVI.

