

Corrigé Intégration 1^{ère} session 2008-9

Question 1 Prenons deux fonctions égales sauf en un point.

Prenons $f = 0$ l'application nulle

et $g = \chi_{\{1\}}$

En $x = 1$ $g(x) = 1 \neq 0 = f(x)$

donc $g \neq f$

$$\left. \begin{array}{l} \mu(\{1\}) = \mu([1, 1]) = 1 - 1 = 0 \\ \forall x \notin \{1\} \quad g(x) = 0 = f(x) \end{array} \right\}$$

donc $f = g$ presque partout

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ application constante est mesurable} \\ \int_{\mathbb{R}} |f| d\mu = \int_{\mathbb{R}} 0 d\mu = 0 < +\infty \end{array} \right\}$$

donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$

$\{1\}$ fermée de $\mathbb{R}$ donc borélien sur $\mathbb{R}$

donc $g = \chi_{\{1\}}$ mesurable

$$\int_{\mathbb{R}} |g| d\mu = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{1\}} d\mu = \mu(\{1\}) = 0 \quad (2)$$

donc g intégrable sur $\mathbb{R}$

on peut aussi prendre $g = \chi_{\mathbb{R}}$

Question 2

L l'application linéaire

$$L: L^2([0, 2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T}, \delta, \mathbb{C})$$

$$f \longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$$

est une bijection qui préserve les normes :

c à d un isomorphisme d'espaces vectoriels normés

Ici

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} f(t) e^{-int} d\mu(t)$$

n est le coefficient de Fourier de f

μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi[$

δ est la mesure de dénombrement sur $(\mathbb{T}, \mathcal{P}(\mathbb{T}))$

Question 3 Vous corrigé contrôle continue 2008-9

Exercice 4

(3)

$$(1) \quad f(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \quad \text{continue sur } \mathbb{R}^{++}$$

donc sur $[0, n]$

donc problème en 0

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \underset{0}{\sim} \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0 \quad \text{donc } \ln x \text{ est négligeable}$$

devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0

$$\text{Comme } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ CV, par comparaison } \int_0^1 \ln x \, dx$$

converge absolument donc par équivalence

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx \text{ CVA.}$$

$$2) \quad g(x) = e^{-x} \ln x \quad \text{continue sur } \mathbb{R}^{++}$$

donc Pb en 0 et en $+\infty$

en 0 $e^{-x} \ln x \underset{0}{\sim} \ln x$. On a au plus

(4)

Raut que $\int_0^1 \ln x \, dx$ CVA donc $\int_0^1 e^{-x} \ln x \, dx$ CVA

ex $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} \ln x = 0$$

donc $e^{-x} \ln x$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ CV donc par comparaison } \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$$

converge absolument donc $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$ converge

absolument

$$(3) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)}$$

$$\ln(1+h) = h + h \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

$$\text{donc } \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -\frac{x}{n} + \frac{-x}{n} \varepsilon\left(-\frac{x}{n}\right)$$

$$\text{donc } \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\left(-\frac{x}{n} + \frac{-x}{n} \varepsilon\left(-\frac{x}{n}\right)\right)} = e^{-x - x \varepsilon\left(-\frac{x}{n}\right)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x - x \times 0} = e^{-x}$$

(5)

$$4) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{++} \quad \ln(x) \leq x - 1$$

$$\text{c \u00e0 d} \quad \forall h \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+h) \leq h$$

$$\text{donc} \quad \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$$

$$\text{donc} \quad n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -x$$

donc comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \leq e^{-x}$$

$$5) \quad \text{J' apr\u00e8s (1)} \quad \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x$$

est int\u00e9grable sur $]0, n]$

$$\text{et} \quad \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx = \int_{]0, n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, d\mu(x)$$

$$= \int_{]0, +\infty[} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, \chi_{]0, n]} \, d\mu(x)$$

Appliquons le théorème de convergence dominée à

(6)

$$\text{la suite } b_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \chi_{[0, n]}(x)$$

sur $]0, +\infty[$

• $x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x$ continue donc mesurable sur $]0, +\infty[$

$$]0, n] =]0, +\infty[\cap [0, n] \quad \text{intersection}$$

d'un ouvert de $\mathbb{R}$ et d'un fermé de $\mathbb{R}$

est une boucle de $\mathbb{R}$

donc $\chi_{[0, n]}$ mesurable sur $\mathbb{R}$ donc par

restriction mesurable sur $]0, +\infty[$

$$\text{donc le produit } x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \chi_{[0, n]}(x)$$

est mesurable sur $]0, +\infty[$

• Soit $x \in]0, +\infty[$

Pour n assez grand

$$b_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \times 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln x$$

d'après (3)

(7)

$$\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{cas } x > n$$

$$|b_n(x)| = 0$$

$$\text{cas } x \in [0, n]$$

$$|b_n(x)| = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n |\ln x| x \leq e^{-x} |\ln x|$$

d'après (4)

$$\text{Donc les 2 cas } |b_n(x)| \leq e^{-x} |\ln x|$$

d'après (2) $g(x) = e^{-x} \ln x$ est intégrable

$$\text{sur }]0, +\infty[\quad \text{donc} \quad \int_{]0, +\infty[} e^{-x} |\ln x| d\mu(x) < +\infty$$

on a donc la domination

donc d'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]0, +\infty[} b_n(x) d\mu(x) = \int_{]0, +\infty[} e^{-x} \ln x d\mu(x)$$

d'après (2)

$$\int_{]0, +\infty[} e^{-x} \ln x \, d\mu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx$$

n finalement

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]0, +\infty[} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, \chi_{[0, n]}(x) \, d\mu(x)$$

$$= \int_{]0, +\infty[} e^{-x} \ln x \, d\mu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$$