

Corrigé Intégration 1^{ère} session 2007-8

Question 1 Théorème de continuité sous le signe $\int$

Soit X un espace métrique (Exemple X ouvert de $\mathbb{R}^n$)

Soit (T, dt) un espace mesurable muni d'une mesure positive μ .

Soit $f: X \times T \longrightarrow \mathbb{C}$
 $(x, t) \longmapsto f(x, t)$

une application définie sur $X \times T$ telle que

1) $\forall x \in X$, l'application partielle $f(x, \cdot): T \longrightarrow \mathbb{C}$
 $t \longmapsto f(x, t)$

est mesurable sur T

2) $\forall t \in T$, l'application partielle $f(\cdot, t): X \longrightarrow \mathbb{C}$
 $x \longmapsto f(x, t)$

est continue sur X

3) il existe une application $g: T \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ à valeurs positives mesurable vérifiant $\int_T g(t) d\mu(t) < +\infty$

et $\forall x \in X \forall t \in T \quad |f(x, t)| \leq g(t)$ (hypothèse de domination)

Alors l'application $F(x) = \int_T f(x, t) d\mu(t)$ est définie et continue sur X .

(2)

Question 2

Théorème de Riesz - Fischer. L'application linéaire

$$\begin{aligned} L^2([0, 2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T}, \delta, \mathbb{C}) \\ f &\longmapsto c_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f | e^{int} \rangle \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} f(t) e^{-int} d\mu \end{aligned}$$

qui à une application f associe la suite de ses coefficients de Fourier, est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés.

Ici μ désigne la mesure de Lebesgue.

Ici δ désigne la mesure de Dirac.

Exercice 3

③

1) f est bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, b]$

$$|f(x)| \leq M.$$

donc $\int_{[a, b]} |f(x)| d\mu(x) \leq \int_{[a, b]} M d\mu(x)$ qui est

égale à $M \int_{[a, b]} d\mu = M \mu([a, b]) = M(b-a) < +\infty$

donc f est intégrable sur $[a, b]$

c à d $f \in \mathcal{L}^1([a, b], \mu, \mathbb{R})$

1.4) f est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tq $|f| \leq M$ sur

$[a, b]$ donc $|F(x)| \leq \int_{[a, x]} |f(x)| d\mu(x) = M(x-a)$

donc $\lim_{x \rightarrow a^+} M(x-a) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow a^+} |F(x)| = 0$

c à d $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = 0 = F(a)$

donc F est continue à droite en a

Par la relation de Charles

(4)

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad F(x) &= \int_{[a, x]} f \, d\mu = \int_{[a, x_0]} f \, d\mu + \int_{[x_0, x]} f \, d\mu \\ &= F(x_0) + \int_{[x_0, x]} f \, d\mu \end{aligned}$$

$$\text{d'après iii)} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_{[x_0, x]} f \, d\mu = 0$$

$$\text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

donc F est continue à droite en x_0

iv) Si f est continue sur le segment $[a, b]$,
 F est dérivable sur le segment $[a, b]$

d'après l'exercice 3 TD 4

Remarque: Cette exercice est une simplification de cette exercice 3 TD 4. Nulle part, on n'utilise les propriétés de l'intégrale de Lebesgue. Donc la même démonstration montre que l'intégrale de Riemann d'une application bornée est continue. En fait pour l'intégrale de Lebesgue, il existe de meilleurs résultats

Cette exercice est une amplification du devoir ⑤
Exercice 4) 2 ou on a remplacé n par n^2 .

(1) Cas $x = 0$ on a $\exp(-n^2 x) = 0$

donc la série converge

Cas $x \neq 0$

$$\left| \exp(-n^2 x) \right| \leq \exp(-n^2 x)$$

Montrons que la série $\sum \exp(-n^2 x)$ converge

1^{re} méthode $-n^2 x \leq -nx$ donc

$$\exp(-n^2 x) \leq \exp(-nx) = \exp(-x)^n$$

Comme $0 < \exp(-x) < 1$, la série géométrique

$\sum \exp(-x)^n$ converge. Par comparaison, la série

$\sum \exp(-n^2 x)$ converge

2^{ème} méthode $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \exp(-n^2 x) = 0$

donc la suite $\exp(-n^2 x)$ est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann $2 > 1$),

par le critère de négligeabilité, la série $\sum \exp(-n^2 x)$ converge.

Comme la série $\sum \exp(-n^2 x)$ converge, par comparaison

la série $\sum \sin ax \exp(-n^2 x)$ converge absolument (6)
 donc converge :

$$(2') \quad \int_0^{+\infty} e^{-n^2 x} dx = \left[\frac{e^{-n^2 x}}{-n^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2} - 0$$

$x \mapsto \sin ax \exp(-n^2 x)$ continue sur $[0, +\infty[$.

$$|\sin(ax) \exp(-n^2 x)| \leq e^{-n^2 x}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-n^2 x} dx$ converge. Par comparaison,

$$\int_0^{+\infty} \sin(ax) \exp(-n^2 x) dx \text{ converge absolument donc}$$

voir exo fondamental ou en TD, $x \mapsto \sin ax \exp(-n^2 x)$
 est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$
 et l'intégrale de Lebesgue coïncide avec l'intégrale
 de Riemann généralisée c à d

$$\int_{[0, +\infty[} \sin ax \, e^{-n^2 x} d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \sin ax \, e^{-n^2 x} dx$$

(7)

$$\int_0^{+\infty} \sin ax \, e^{-n^2 x} dx = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{iax} e^{-n^2 x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(ia-n^2)x} dx = \left[\frac{e^{(ia-n^2)x}}{ia-n^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2-ia} + 0$$

$$= \frac{n^2+ia}{(n^2-ia)(n^2+ia)} = \frac{n^2+ia}{n^4+a^2}$$

car $\left| e^{(ia-n^2)x} \right| = e^{-n^2 x} \xrightarrow{\text{quand } x \rightarrow +\infty} 0$

donc $\int_0^{+\infty} \sin ax \, e^{-n^2 x} dx = \frac{a}{n^4+a^2}$

$$(3) \quad \left| \sin(ax) \exp(-n^2 x) \right| \leq e^{-n^2 x}$$

donc $\int_0^{+\infty} \left| \sin ax \exp(-n^2 x) \right| dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-n^2 x} dx = \frac{1}{n^2}$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison, la série $\sum \int_0^{+\infty} \left| \sin ax \right| \exp(-n^2 x) dx$ converge

(1/2) 1^{ère} méthode : on utilise le théorème de commutation des signes $\int_X$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ pour des

applications à termes complexes

Pour tout $n \geq 1$,

$$\text{soit } f_n(x) = \sin(ax) \exp(-n^2 x)$$

c'est l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

$\forall n \geq 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc

mesurable sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable d'après (2).

$$\|f_n\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[0, +\infty[} |f_n(x)| \, d\mu(x) = \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, dx$$

car $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, dx$ converge absolument.

donc d'après (3), la série $\sum \|f_n\|_1$ converge,

on applique le théorème de commutation

S est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on a

$$\int_{[0, +\infty[} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0, +\infty[} f_n(x) \, d\mu(x) \text{ donc d'après}$$

(9)

$$\text{le (2), } \int_{[0, +\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin ax \exp(-n^2 x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^4 + a^2}$$

2^{ème} méthode : on refait la démonstration du théorème de commutation dans ce cas particulier

$$\text{Soit } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\sin(ax)| e^{-n^2 x} dx$$

Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n(x) = \sin ax \exp(-n^2 x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ les $|f_n|$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ donc mesurables sur $\mathbb{R}^+$ et forcément à valeurs positives. Donc d'après le théorème de

Beppo LEVI appliqué à la suite $|f_n|$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| \text{ est mesurable à valeurs positives}$$

$$\text{et on a } \int_{[0, +\infty[} g(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0, +\infty[} |f_n(x)| d\mu(x)$$

$$\text{Comme } \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \text{ converge absolument voir (2)}$$

$$\int_{[0, +\infty[} b_n(x) d\mu(x) = \int_0^{+\infty} |b_n(x)| dx$$

donc
$$\int_{[0, +\infty[} g(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |b_n(x)| dx < +\infty \text{ d'après (3)}$$

Soit
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k(x)$$

• $\forall n$, S_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc mesurable sur $\mathbb{R}^+$

• $\forall x \in X$ la suite $S_n(x)$ converge vers $S(x)$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in X$,

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |b_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k(x)| = g(x)$$

Comme $\int_{[0, +\infty[} g d\mu < +\infty$, on peut appliquer le

théorème de convergence dominée à la suite d'applications S_n

on obtient S est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

et la suite $\int_{[0, +\infty[} S_n d\mu$ converge vers $\int_{[0, +\infty[} S d\mu$.

c.à.d.
$$\int_{[0, +\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x \exp(-n^2 x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{[0, +\infty[} b_k(x) d\mu(x)$$